Problema 11 de la primera hoja de ejercicios

Grupo nº 5

Antonio Castaño Tierno
Víctor Pablo Galván Chacón
Ramón Julián Parejo Cuellar
Jesús Miguel Simón Martín

Métodos de la física matemática
Física, Universidad de Extremadura
Curso 2008-2009

Sea el problema no homogéneo y''= f(x), 0 ≤ x ≤ L, y(0)=y'(L)=0.

a) Encuentra las autofunciones normalizadas del operador $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ para las condiciones de contorno dadas.

Para encontrar las autofunciones del operador derivada segunda resolvemos la ecuación siguiente

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} = -\lambda_n \varphi_n$$

El tipo de raíces que encontremos depende del signo de λ_n, por lo que veremos todos los casos.

<u>Caso λ_n =0</u>

En este caso tenemos que $\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} = -\lambda_n \varphi_n = 0$. Integrando obtenemos φ_n:

$$\frac{\partial\ \varphi_n}{\partial x} = \int 0 dx = cte \equiv A$$
$$\varphi_n = \int A dx = Ax + B$$

Aplicamos las condiciones de contorno:

$$\varphi_n(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$
$$\varphi_n'(L) = A\big|_{x=L} = 0 \Rightarrow A = 0$$

Llegamos de este modo a la solución trivial A=B=0.

<u>Caso λ_n <0</u>

Si $-\lambda_n$ >0 la solución será del tipo exponencial

$$\varphi_n(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda_n}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda_n}x}$$

Aplicamos las condiciones de contorno:

$$\varphi_n(0) = 0 \Rightarrow Ae^0 + Be^0 = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$\varphi_n'(L) = A\sqrt{-\lambda_n}e^{\sqrt{-\lambda_n}x} - B\sqrt{-\lambda_n}e^{-\sqrt{-\lambda_n}x}\Big|_{x=L} = A(\sqrt{-\lambda_n}e^{\sqrt{-\lambda_n}x} + \sqrt{-\lambda_n}e^{-\sqrt{-\lambda_n}x})\Big|_{x=L} = 0$$

La única manera de que esto sea cero es que sea A = 0:

$$\Rightarrow A = B = 0$$

Llegamos nuevamente a la solución trivial.

Caso $\lambda_n > 0$

Si $-\lambda_n > 0$ las raíces serán complejas y la solución vendrá dada por una combinación de funciones trigonométricas:

$$\varphi_n(x) = A\cos\sqrt{\lambda_n}x + B\sin\sqrt{\lambda_n}x$$

Aplicamos las condiciones de contorno:

$$\varphi_n(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\varphi_n'(L) = B\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x\Big|_{x=L} = 0$$

Para que esta condición sea cero debe ser ó B=0 (lo que nos conduciría de nuevo a la solución trivial), ó λ_n=0 (lo cual va en contra de nuestra suposición inicial) ó que $\cos\sqrt{\lambda_n}L$ sea cero.

$$\cos\sqrt{\lambda_n}L = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_n}L = (2n+1)\frac{\Pi}{2} \Rightarrow \sqrt{\lambda_n} = (2n+1)\frac{\Pi}{2}L$$

Ahora obtendremos el valor de B que normaliza las autofunciones obtenidas

$$\left\|\varphi_n^2\right\| = 1$$

$$1 = \int_0^L \varphi_n \varphi_n dx = B^2 \int_0^L \sin^2 \sqrt{\lambda_n} x dx = B^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n} x}{4\sqrt{\lambda_n}} \right]_0^L = B^2 \left[\frac{L}{2} - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n} L}{4\sqrt{\lambda_n}} \right]$$

Despejando B:

$$B = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n} L}{4\sqrt{\lambda_n}} \right)}}$$

Sustituyendo la expresión obtenida para los autovalores:

$$B = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - \frac{\sin(2(2n+1)\frac{\Pi}{2} LL)}{4(2n+1)\frac{\Pi}{2} L} \right)}}$$

Desarrollando el seno tenemos:

$$\sin 2(2n+1)\frac{\pi}{2} L^2 = \sin(2n+1)\pi L^2 = \sin 2n\pi L^2 \cos \pi L^2 + \cos 2n\pi L^2 \sin \pi L^2 = 0$$

Por lo tanto, nos quedara:

$$B = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Sustituyendo en φ_n tenemos:

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2L} x$$

b) Escribe la función de Green G(x,x') mediante un desarrollo en serie.

El desarrollo lo obtenemos sustituyendo el valor obtenido para las autofunciones en la expresión siguiente (en la que no aparece en el denominador la norma al cuadrado debido a que las autofunciones ya están normalizadas):

$$G(x,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^*(\xi)\varphi(x)}{\lambda-\lambda_n}$$

Comparando nuestro problema con la ecuación de Sturm-Liouville vemos que el parámetro λ es igual a cero.
Ahora simplemente sustituimos en la expresión anterior el valor de las autofunciones y los autovalores:

$$G(x,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{2}{L}\sin\left(\frac{2n+1}{L}\frac{\Pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{2n+1}{L}\frac{\Pi}{2}\xi\right)}{-\frac{(2n+1)^2\Pi^2}{4L^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-8L}{\Pi^2}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{L}\frac{\Pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{2n+1}{L}\frac{\Pi}{2}\xi\right)}{(2n+1)^2}$$

El desarrollo en serie de la función de Green obtenido es:

$$\boxed{G(x,\xi)=\frac{-8L}{\Pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{L}\frac{\Pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{2n+1}{L}\frac{\Pi}{2}\xi\right)}{(2n+1)^2}}$$

c) Obtén G(x, ξ) en forma cerrada.

Sea la ecuación diferencial de Sturm-Liouville no homogénea:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

Donde $0 \leq x \leq L$, $y(0) = y'(L) = 0$. Calculemos la función de Green de este problema. La solución general de la homogénea:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Será:

$y(x) = A + B(x)$

$y_1(x) = A_1 + B_1 x$ es la solución que satisface la condición de contorno en $x=0$:

$y_1(0)=0 \Rightarrow A_1+B_1x = 0 \Rightarrow A_1=0$

$y_2(x) = A_2+B_2x$ es la solución que satisface la condición de contorno en $x=L$:

$y_2'(L)=0 \Rightarrow B_2=0$

Por lo tanto, la función de Green será:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} C_1(\xi)x, & 0 \leq x < \xi \\ C_2(\xi)\ , & 0 < x \leq \xi \end{cases}$$

Aplicando las condiciones de continuidad de G en ξ y de discontinuidad de G' en ξ, podremos calcular C_1 y C_2:

$C_1(\xi)\xi - C_2(\xi) = 0$

$-C_1(\xi) = \frac{1}{P(\xi)}$

En nuestro caso $P(x)=1$, por lo tanto:

$C_1(\xi)\xi - C_2(\xi) = 0$

$-C_1(\xi) = 1$

Resolviendo el sistema tenemos:

$C_1=-1 \quad C_2(\xi)=\xi$

Por lo tanto, nuestra función de Green será:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -x & 0 \leq x \leq \xi \\ -\xi & \xi \leq x \leq L \end{cases}$$

d) Encontrar la solución del problema para el caso particular f(x) = x^2 con L = 1.

Para este caso, aplicamos la siguiente fórmula:

$$y(x) = \int_0^L G(x,\xi)\xi^2\, d\xi$$

Dividimos la integral en dos:

$$y(x) = \int_0^x -\xi\xi^2 d\xi + \int_x^L -x\xi^2 d\xi = -\frac{\xi^4}{4}\bigg|_0^x - x\frac{\xi^3}{3}\bigg|_x^L =$$

$$= -\left(\frac{x^4}{4}\right) - x\left(\frac{L^3}{3} - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^4 - 4xL^3}{12}$$

En el caso de que L sea igual a 1, tendremos:

$$y(x) = \frac{x^4 - 4x}{12}$$