Mónica Capilla Alba
Jesús Manuel Gómez Romero

Ejercicio 16.- Sea la ecuación de Sturm-Liouville no homogénea

$$y'' - m^2 y = f(x) \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) + y'(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0$$

donde $m^2 > 0$. Se pide hallar la función de Green correspondiente en forma de desarrollo en serie de autofunciones.

Identificando la ecuación dada con la ecuación de Sturm-Liouville inhomogénea, tenemos $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $r(x) = 1$, $\mu = -m^2$. Las condiciones de contorno son regulares, con $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = 1$ y $\beta_2 = 0$.

La ecuación característica asociada es: $r^2 + \lambda = 0$

$$\Rightarrow \quad r^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad r = \pm\sqrt{-\lambda}$$

Ahora estudiemos los casos posibles según el valor que tome λ:

Si $\lambda < 0$:

Entonces tenemos una solución del tipo

$$y(x) = A \cosh \sqrt{-\lambda}\, x + B\, senh \sqrt{-\lambda}\, x$$

Cuya derivada es

$$y'(x) = -A\sqrt{-\lambda}\; senh \sqrt{-\lambda}\, x + B\sqrt{-\lambda}\, \cosh \sqrt{-\lambda}\, x$$

Aplicamos las condiciones de contorno

$$y(0) + y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A + B\sqrt{-\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B\sqrt{-\lambda}$$

$$y(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad A \cosh\sqrt{-\lambda} + B\, senh\sqrt{-\lambda} = 0$$

dividimos entre el cosh $\sqrt{-\lambda}$ y sustituyendo A:

$$A + B\, tgh\sqrt{-\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad -B\sqrt{-\lambda} + B\, tgh\sqrt{-\lambda} = 0$$

$$B\, tgh\sqrt{-\lambda} = B\sqrt{-\lambda} \quad \Rightarrow \quad tgh\sqrt{-\lambda} = \sqrt{-\lambda}$$

Llegamos a una ecuación trascendente:

$$\boxed{tgh\sqrt{-\lambda} = \sqrt{-\lambda}}$$

Esta ecuación sólo tiene solución para $\lambda = 0$, pero como estamos en el caso de $\lambda < 0$, no tiene solución distinta de la trivial.

Si $\lambda = 0$:

Tendremos una solución del tipo

$$y(x) = A\,x + B$$

Aplicamos las condiciones de contorno

$$y(0) + y'(0) = 0 \;\Rightarrow\; A\cdot 0 + B + A = 0 \;\Rightarrow\; B = -A$$

$$y(1) = 0 \;\Rightarrow\; A\cdot 1 + B = 0 \;\Rightarrow\; A - A = 0 \;\Rightarrow\; A = A$$

es decir, se cumple para cualquier valor de A.

Por tanto, obtenemos una solución, para $\lambda = 0$:

$$y(x) = A\,(x-1)$$

La autofunción asociada al autovalor $\lambda_0 = 0$ es $\psi_0(x) = x - 1$.

Si $\lambda > 0$:

Entonces tenemos una solución del tipo

$$y(x) = A\,\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\,sen\sqrt{\lambda}\,x$$

Teniendo en cuenta la identidad trigonométrica siguiente:

$$a\,sen\,x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\;sen\left(x + \arctan\frac{b}{a}\right)$$

para nuestro caso:

$$y(x) = A\,\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\,sen\sqrt{\lambda}\,x = \sqrt{A^2+B^2}\;sen\left(\sqrt{\lambda}\,x + \arctan\frac{B}{A}\right)$$

renombrando las constantes, tenemos que:

$$y(x) = A\,sen\left(\sqrt{\lambda}\,x + B\right)$$

Cuya derivada es

$$y'(x) = A\sqrt{\lambda}\,\cos\left(\sqrt{\lambda}\,x + B\right)$$

Aplicamos las condiciones de contorno

$$y(1) = 0 \;\Rightarrow\; A\,sen\left(\sqrt{\lambda}\cdot 1 + B\right) = 0$$

para no obtener la solución trivial $A \neq 0$, entonces:

$$sen\left(\sqrt{\lambda} + B\right) = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\lambda} + B = 0 \;\Rightarrow\; B = -\sqrt{\lambda}$$

$$y(0) + y'(0) = 0 \;\Rightarrow\; A\, sen\, B + A\sqrt{\lambda}\cos B = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; sen\left(-\sqrt{\lambda}\right) + \sqrt{\lambda}\cos\left(-\sqrt{\lambda}\right) = 0 \;\Rightarrow\; -sen\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0$$

Nos queda la siguiente ecuación trascendente:

$$\boxed{\tan\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}}$$

Los valores de λ que cumplen esta ecuación trascendente son los autovalores λ_n, cuyas autofunciones asociadas son:

$$\psi_n(x) = sen\left[\sqrt{\lambda_n}\,(x-1)\right]$$

Tenemos que hallar la función de Green mediante desarrollo en serie de autofunciones, para ello debemos utilizar la expresión:

$$G(x,x') = \sum_n \frac{1}{\|\psi_n(x)\|^2}\,\frac{\psi_n(x)\,\psi_n^*(x')}{\mu-\lambda_n}$$

Habíamos obtenido:

- $\lambda_0 \;\rightarrow\; \psi_0(x) = x-1 \;\rightarrow\; \psi_0^*(x') = x'-1$
- $\lambda_n \;\rightarrow\; \psi_n(x) = sen\left[\sqrt{\lambda_n}\,(x-1)\right] \;\rightarrow\; \psi_n^*(x') = sen\left[\sqrt{\lambda_n}\,(x'-1)\right]$

Entonces nuestra función de Green podremos escribirla como:

$$G(x,x') = \frac{1}{\|\psi_0(x)\|^2}\,\frac{\psi_0(x)\,\psi_0^*(x')}{\mu-\lambda_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\|\psi_n(x)\|^2}\,\frac{\psi_n(x)\,\psi_n^*(x')}{\mu-\lambda_n}$$

Calculamos:

$$\|\psi_n\|^2 = \int_a^b dx\, r(x)\,\psi_n(x)\,\psi_n^*(x)$$

$$\|\psi_0\|^2 = \|(x-1)\|^2 = \int_0^1 dx\,1\,(x-1)^2 = \int_0^1 dx\,(x^2-2x+1) = \left.\frac{x^3}{3}+x-x^2\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\|\psi_n\|^2 = \left\| sen\left[\sqrt{\lambda_n}\,(x-1)\right]\right\|^2 = \int_0^1 dx\,1\,sen^2\left[\sqrt{\lambda_n}\,(x-1)\right]$$

hacemos el cambio de variable
$$z = x-1 \;\rightarrow\; dz = dx$$
$$x=0 \;\rightarrow\; z=-1 \;;\; x=1 \;\rightarrow\; z=0$$

$$\|\psi_n\|^2 = \int_{-1}^{0} dz\, sen^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,z\right) = \frac{1}{2}\left.\left(z - \frac{sen\left(\sqrt{\lambda_n}\,z\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,z\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\right)\right|_{-1}^{0}$$

$$\|\psi_n\|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{sen\left(-\sqrt{\lambda_n}\right)\cos\left(-\sqrt{\lambda_n}\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{sen\sqrt{\lambda_n}\ \cos\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$$

$$\|\psi_n\|^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{sen\sqrt{\lambda_n}\ \cos\sqrt{\lambda_n}}{2\tan\sqrt{\lambda_n}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos^2\sqrt{\lambda_n}\right) = \frac{1}{2}\, sen^2\sqrt{\lambda_n}$$

Sustituyendo en la expresión para calcular la función de Green, obtenemos:

$$G(x,x') = 3\,\frac{(x-1)(x'-1)}{\left(-m^2 - 0\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{sen^2\sqrt{\lambda_n}}\,\frac{sen\left[\sqrt{\lambda_n}\,(x-1)\right] sen\left[\sqrt{\lambda_n}\,(x'-1)\right]}{\left(-m^2 - \lambda_n\right)}$$

$$\boxed{G(x,x') = -\frac{3}{m^2}\,(x-1)(x'-1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{m^2+\lambda_n}\,\frac{sen\left[\sqrt{\lambda_n}\,(x-1)\right] sen\left[\sqrt{\lambda_n}\,(x'-1)\right]}{sen^2\sqrt{\lambda_n}}}$$