Métodos de la Física Matemática

Tema 1 – Problema de Sturm-Liouville

María F. Collado Caballero
Antonio E. Hurtado Romero
Esther Leal Cidoncha
Isabel Mª Martín Ríos

Hoja 1 - Problema 5º

a) Halla la ecuación trascendente que determina los autovalores λ_n y obtén las autofunciones $\psi_n(x)$ del problema de Sturm-Liouville definido por la ecuación diferencial:

$$y''(x) = -\lambda_n y(x) \qquad \text{en el intervalo} \quad 0 \le x \le a$$

con las condiciones de contorno: $\begin{cases} y(0) + ay'(0) = 0 \\ y(a) - ay'(a) = 0 \end{cases}$

En forma operacional, la ecuación diferencial que proviene del problema de Sturm-Liouville con: $\mathcal{L} = D^2$; $p(x) = 1$; $q(x) = 0$; $r(x) = 1$

es: $$(D^2 + \lambda)y = 0 \quad \Rightarrow \quad D = \pm\sqrt{-\lambda}$$

Podemos tener varios casos:

Caso 1) $\lambda = 0$

Donde la solución general es:

$$\begin{cases} y(x) = Ax + B \\ y'(x) = A \end{cases}$$

Aplicamos las condiciones de contorno:

1.1) $y(0) + ay'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B + aA = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -Aa$

Entonces:

$y(x) = Ax - Aa = A(x - a)$

$y'(x) = A$

1.2) $y(a) - ay'(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad A(a - a) - aA = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 0}$

Entonces $\lambda = 0$ no es autovalor, ya que sólo proporciona la solución trivial.

Caso 2) $\lambda < 0$

Donde la solución general es:

$$\begin{cases} y(x) = Ae^{x\sqrt{-\lambda}} + Be^{-x\sqrt{-\lambda}} \\ y'(x) = \sqrt{-\lambda}Ae^{x\sqrt{-\lambda}} - \sqrt{-\lambda}Be^{-x\sqrt{-\lambda}} \end{cases}$$

Llamemos $m = a\sqrt{-\lambda}$

Aplicamos las condiciones de contorno:

2.1) $y(0) + ay'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A + B + m(A - B) = 0$

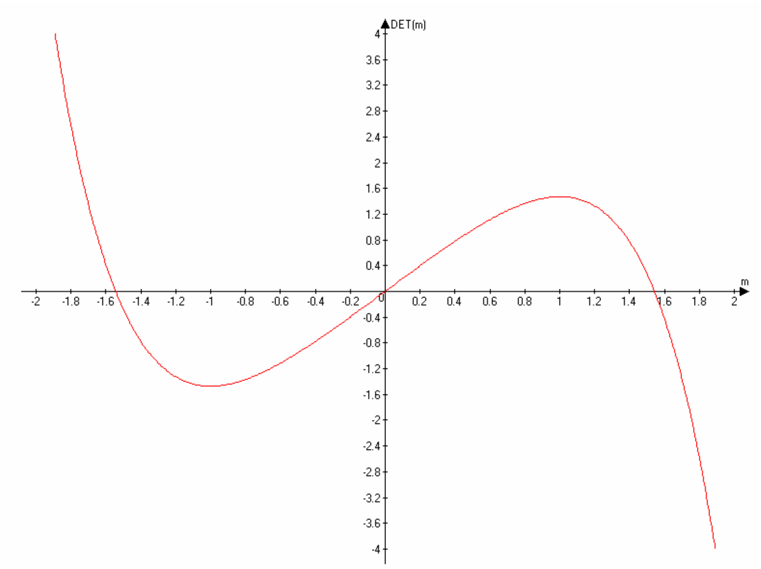
2.2) $y(a) - ay'(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad Ae^{m} + Be^{-m} - m(Ae^{m} - Be^{-m}) = 0$

Para comprobar si m nos conduce a algún autovalor hay que analizar el determinante de los coeficientes del sistema de ecuaciones obtenido a partir de las condiciones de contorno, en función de m. Si el determinante es 0, entonces $\left(\frac{m}{a}\right)^2 = -\lambda$ corresponderá a un autovalor:

$$\begin{pmatrix} 1+m & 1-m \\ e^{m}(1-m) & e^{-m}(1+m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{DET}(m) = \begin{vmatrix} 1+m & 1-m \\ e^{m}(1-m) & e^{-m}(1+m) \end{vmatrix} = e^{-m}(1+m)^2 - e^{m}(1-m)^2 = 0$$

Analíticamente no podemos resolver esta ecuación, por ello recurriremos a su representación gráfica:



Como podemos comprobar, existen valores de m que anulan el determinante. En este caso particular $m \simeq$ -1.54, 0, 1.54 (valores obtenidos con un programa de análisis numérico).

Visto que existe solución al problema para $\lambda < 0$, la ecuación trascendente que determina los autovalores λ_n será precisamente:

$$\left.\begin{array}{l} e^{-m}(1+m)^2 - e^{m}(1-m)^2 = 0 \\ m = a\sqrt{-\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{e^{-a\sqrt{-\lambda_n}}(1+a\sqrt{-\lambda_n})^2 = e^{a\sqrt{-\lambda_n}}(1-a\sqrt{-\lambda_n})^2}$$

excepto $\lambda_n = 0$, que ya vimos en el caso anterior que nos conduce a la solución trivial.

y las autofunciones asociadas a esos autovalores serán:

$$\boxed{\psi_n(x) = e^{x\sqrt{-\lambda_n}} + e^{-x\sqrt{-\lambda_n}}}$$

Caso 3) $\lambda > 0$

Donde la solución general es:

$y(x) = Ae^{x\sqrt{-\lambda}} + Be^{-x\sqrt{-\lambda}}$ Como $\lambda > 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} = i\sqrt{\lambda}$

Con lo cual:

$y(x) = Ae^{ix\sqrt{\lambda}} + Be^{-ix\sqrt{\lambda}}$

Que resulta más conveniente expresarlo como combinación lineal de funciones trigonométricas:

$$\begin{cases} y(x) = C\cos(x\sqrt{\lambda}) + D\sin(x\sqrt{\lambda}) \\ y'(x) = -\sqrt{\lambda}C\sin(x\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}D\cos(x\sqrt{\lambda}) \end{cases}$$

Aplicamos las condiciones de contorno:

3.1) $y(0) + ay'(0) = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad C\cos(0) + D\sin(0) + a\sqrt{\lambda}[-C\sin(0) + D\cos(0)] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C + a\sqrt{\lambda}D = 0$$

3.2) $y(a) - ay'(a) = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad C\cos(a\sqrt{\lambda}) + D\sin(a\sqrt{\lambda}) - a\sqrt{\lambda}[-C\sin(a\sqrt{\lambda}) + D\cos(a\sqrt{\lambda})] = 0$$

$$\Rightarrow \quad C[\cos(a\sqrt{\lambda}) + a\sqrt{\lambda}\sin(a\sqrt{\lambda})] + D[\sin(a\sqrt{\lambda}) - a\sqrt{\lambda}\cos(a\sqrt{\lambda})] = 0$$

Llamando $z = a\sqrt{\lambda}$ nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C + zD = 0 \\ C[\cos(z) + z\sin(z)] + D[\sin(z) - z\cos(z)] = 0 \end{cases}$$

Para comprobar si z nos conduce a algún autovalor analizamos el determinante de los coeficientes del sistema de ecuaciones obtenido a partir de las condiciones de contorno, de forma análoga al caso anterior:

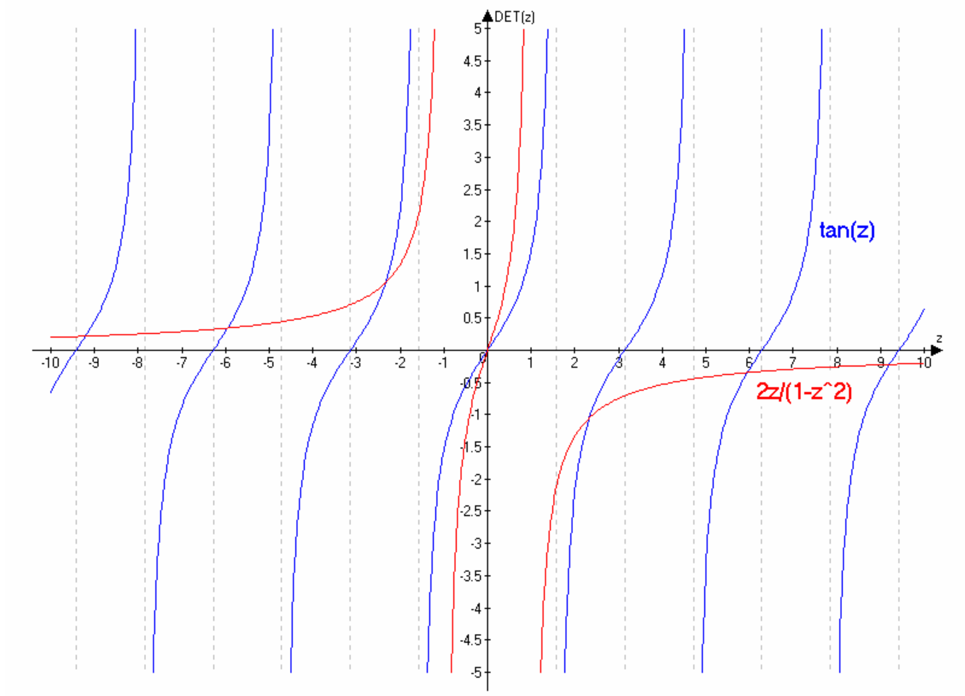
$$\begin{pmatrix} 1 & z \\ \cos(z) + z\sin(z) & \sin(z) - z\cos(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{DET}(z) = \begin{vmatrix} 1 & z \\ \cos(z) + z\sin(z) & \sin(z) - z\cos(z) \end{vmatrix} = (1 - z^2)\sin(z) - 2z\cos(z) = 0$$

simplificando y sustituyendo $z = a\sqrt{\lambda}$ obtenemos la ecuación trascendente:

$$\boxed{\tan(a\sqrt{\lambda_n}) = \frac{2a\sqrt{\lambda_n}}{1 - a^2\lambda_n}}$$

Si representamos gráficamente:



Algunos de los valores de z que hemos obtenido con la ayuda de un programa de análisis numérico, para los cuales se cumple la ecuación trascendente son $z = 0$, 2.33, 5.95, 9.21, ...

Las autofunciones asociadas a esos autovalores serán:

$$\boxed{\psi_n(x) = \cos(x\sqrt{\lambda_n}) + \sin(x\sqrt{\lambda_n})}$$

Podemos normalizarlas a la unidad exigiendo: $\langle \psi_n \mid \psi_n \rangle = \left\| \psi_n \right\|^2 = 1$

b) ¿Existe, en general, solución del problema inhomogéneo:

$$y''+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 y = f(x) \quad ; \quad \begin{cases} y(0)+ay'(0)=0 \\ y(a)-ay'(a)=0 \end{cases}$$

En caso afirmativo halla la función de Green correspondiente.

El Teorema de la alternativa de Fredholm dice que si el parámetro μ del problema inhomogéneo no es autovalor, entonces está asegurada la solución del problema inhomogéneo.

Nos dicen que $\mu = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$, así que si sustituimos en las ecuaciones trascendentes obtenidas en el apartado anterior sabremos si se trata de un autovalor.

Para el **Caso 2** es imposible que μ sea autovalor ya que el caso era $\lambda < 0$ y $\mu = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 > 0$ siempre.

Para el **Caso 3**, sustituimos μ en λ_n:

$$\left.\begin{aligned} &\tan(a\sqrt{\lambda_n}) = \frac{2a\sqrt{\lambda_n}}{1-a^2\lambda_n} \\ &\mu = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \tan(\pi)=0 \neq \frac{2\pi}{1-\pi^2} \quad \text{por tanto } \mu \text{ no es autovalor.}$$

Ahora se nos pide hallar la función de Green, para ello nos remitimos al problema homogéneo:

$$y''+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 y = 0$$

En forma operacional $\left(D^2+\frac{\pi^2}{a^2}\right)y=0$, tenemos que:

$$D^2 = -\frac{\pi^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad D = \pm\sqrt{-\frac{\pi^2}{a^2}} = \pm i\sqrt{\frac{\pi^2}{a^2}} = \pm i\frac{\pi}{a}$$

Por tanto, la solución general:

$$y(x) = A'e^{ix\frac{\pi}{a}} + B'e^{-ix\frac{\pi}{a}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x) = A\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)}$$

Desglosamos la solución general para dos intervalos de validez:

$$1)\quad y_1(x) = A_1 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + B_1 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \qquad 0 \le x \le \xi$$

$$2)\quad y_2(x) = A_2 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + B_2 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \qquad \xi \le x \le a$$

Aplicamos las condiciones de contorno a ambos intervalos:

1) $y_1(0) + ay'_1(0) = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad A_1 \cos(0) + B_1 \sin(0) + a\left[-A_1 \frac{\pi}{a}\sin(0) + B_1 \frac{\pi}{a}\cos(0)\right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A_1 + a\frac{\pi}{a}B_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 + \pi B_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_1 = -\pi B_1}$$

Luego: $$y_1(x) = B_1\left[-\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right]$$

2) $y_2(a) - ay'_2(a) = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad A_2 \cos\left(\frac{\pi}{a}a\right) + B_2 \sin\left(\frac{\pi}{a}a\right) - a\left[-A_2 \frac{\pi}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}a\right) + B_2 \frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi}{a}a\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_2 \cos(\pi) + B_2 \sin(\pi) + A_2\pi \sin(\pi) - B_2\pi\cos(\pi) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -A_2 + \pi B_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_2 = \pi B_2}$$

Luego: $$y_2(x) = B_2\left[\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right]$$

La función de Green queda:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} G_1(x,\xi) = \tilde{c}_1(\xi)B_1\left[-\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right] & 0 \le x \le \xi \\ G_2(x,\xi) = \tilde{c}_2(\xi)B_2\left[\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right] & \xi \le x \le a \end{cases}$$

es decir:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} G_1(x,\xi) = c_1(\xi)\left[-\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right] & 0 \le x \le \xi \\ G_2(x,\xi) = c_2(\xi)\left[\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right] & \xi \le x \le a \end{cases}$$

Hacemos la derivada de la función de Green:

$$G'(x,\xi)=\begin{cases} G'_1(x,\xi)=c_1(\xi)\left[\dfrac{\pi^2}{a}\sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)+\dfrac{\pi}{a}\cos\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)\right] & 0\le x\le \xi \\ G'_2(x,\xi)=c_2(\xi)\left[-\dfrac{\pi^2}{a}\sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)+\dfrac{\pi}{a}\cos\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)\right] & \xi\le x\le a \end{cases}$$

Aplicamos las condiciones, de continuidad en $x=\xi$ y de salto finito en la primera derivada:

$$c_2(\xi)\left[\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)+\sin\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]-c_1(\xi)\left[-\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)+\sin\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]=0$$

$$c_2(\xi)\left[-\frac{\pi^2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)+\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]-c_1(\xi)\left[\frac{\pi^2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)+\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]=1$$

Analizamos el determinante de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} \pi\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)-\sin\left(\frac{\pi}{a}\xi\right) & \pi\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)+\sin\left(\frac{\pi}{a}\xi\right) \\ -\frac{\pi^2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)-\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right) & -\frac{\pi^2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)+\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right) \end{vmatrix}=\frac{2\pi^2}{a}\neq 0$$

Resolvemos por Cramer el sistema de ecuaciones:

$$c_1(\xi)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \pi\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)+\sin\left(\frac{\pi}{a}\xi\right) \\ 1 & -\frac{\pi^2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)+\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right) \end{vmatrix}}{\frac{2\pi^2}{a}}=\frac{-a}{2\pi^2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)+\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]$$

$$c_2(\xi)=\frac{\begin{vmatrix} \pi\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)-\sin\left(\frac{\pi}{a}\xi\right) & 0 \\ -\frac{\pi^2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)-\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right) & 1 \end{vmatrix}}{\frac{2\pi^2}{a}}=\frac{-a}{2\pi^2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)-\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]$$

Y la función de Green es:

$$\boxed{G(x,\xi)=\begin{cases} G_1(x,\xi)=\dfrac{-a}{2\pi^2}\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{a}\xi\right)+\pi\cos\left(\dfrac{\pi}{a}\xi\right)\right]\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)-\pi\cos\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)\right] & 0\le x\le \xi \\ G_2(x,\xi)=\dfrac{-a}{2\pi^2}\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{a}\xi\right)-\pi\cos\left(\dfrac{\pi}{a}\xi\right)\right]\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)+\pi\cos\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)\right] & \xi\le x\le a \end{cases}}$$

Claramente se ve que hay simetría entre ξ y x.