Carmen Mª García Tardío
Ángel Hierro Gardeta
Pablo Pajuelo Cabezas
Amalia Toboso Castañera

6) Encuentra la función de Green en forma cerrada del problema de Sturn-Liouville singular

$$\boldsymbol{xy'' + y' - \frac{4}{x}y = f(x), \qquad x \geq 1,}$$

$$\boldsymbol{y(1) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = finito}$$

Halla y(x) si f(x)=1/x.

En primer lugar, comparando la ecuación diferencial dada con la expresión del problema de Sturn-Liouville:

$$\begin{cases} xy'' + y' - \dfrac{4}{x}y = f(x) \\ p(x)y'' + p'(x)y' + (\lambda r(x) - s(x))y = f(x) \end{cases}$$

Podemos ver que p(x)=x, dato que necesitaremos al aplicar las propiedades de la función de Green.

Si aceptamos que G(x,ξ) es solución de la ecuación diferencial homogénea asociada, entonces se cumple que:

$$xG'' + G' - \frac{4}{x}G = \delta(x - \xi) = 0, \quad x \neq \xi$$

Para resolver esta ecuación diferencial, podemos proponer una solución de la forma $y = x^m$, o si multiplicamos por x toda la ecuación ver que tiene la forma de una ecuación diferencial de Euler (ver anexo).

En ambos casos la solución es la misma, como cabría esperar:

$$y = Ax^2 + Bx^{-2}$$

Luego nuestra función de Green tiene la forma:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} A(\xi)x^2 + B(\xi)x^{-2}, & 1 \leq x < \xi \\ C(\xi)x^2 + D(\xi)x^{-2}, & \xi < x < \infty \end{cases}$$

Carmen Mª García Tardío
Ángel Hierro Gardeta
Pablo Pajuelo Cabezas
Amalia Toboso Castañera

Aplicando las condiciones de contorno:

- $G(1,\xi) = 0, \;\; \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \mathrm{A} = -\mathrm{B}$
- $\lim_{x\to\infty} G(x,\xi) \equiv \text{finito}, \;\; \mathrm{C}\lim_{x\to\infty} \mathrm{x}^2 + \mathrm{D}\lim_{\mathrm{x}\to\infty} \mathrm{x}^{-2} \equiv \text{finito}, \quad \mathrm{C} = 0$

La función de Green se reduce a:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} A(\xi)(\mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^{-2}), & 1 \le \mathrm{x} < \xi \\ \mathrm{D}(\xi)\mathrm{x}^{-2}, & \xi < x < \infty \end{cases}$$

Aplicamos ahora las propiedades de la función de Green:

- Continuidad en x=ξ

$$G(\xi^+,\xi) = \mathrm{G}(\xi^-,\xi) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A}(\xi^2 + \xi^{-2}) = \mathrm{D}\xi^{-2}$$

- Salto en la derivada

$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi^+} - \left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi^-} = \frac{1}{p(\xi)} = \frac{1}{\xi}$$

$$2D\xi^{-2} + 2A(\xi^2 + \xi^{-2}) = -1$$

De estas dos ecuaciones obtenemos A(ξ) y D(ξ). La función de Green asociada a nuestro problema de Sturn-Liouville queda definida de la siguiente manera:

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{4}\begin{cases} \xi^{-2}(\mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^{-2}), & 1 \le \mathrm{x} \le \xi \\ (\xi^2 + \xi^{-2})\mathrm{x}^{-2}, & \xi \le \mathrm{x} < \infty \end{cases}$$

Veamos ahora la solución del problema cuando f(x)=1/x.

$$y(x) = \int_1^\infty G(x,\xi)\mathrm{f}(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_1^{\mathrm{x}} \mathrm{d}\xi \mathrm{G}(\mathrm{x},\xi)\xi^{-1} + \int_{\mathrm{x}}^\infty \mathrm{d}\xi \mathrm{G}(\mathrm{x},\xi)\xi^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left\{\int_1^{\mathrm{x}} \mathrm{d}\xi(\xi^2 + \xi^{-2})\mathrm{x}^{-2}\xi^{-1} + \int_{\mathrm{x}}^\infty \mathrm{d}\xi\xi^{-2}(\mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^{-2})\xi^{-1}\right\}$$

Resolviendo estas integrales llegamos a:

$$y(x) = \frac{1}{4}(x^{-2} - 1)$$

Carmen Mª García Tardío
Ángel Hierro Gardeta
Pablo Pajuelo Cabezas
Amalia Toboso Castañera

ANEXO. RESOLUCIÓN ECUACION DE EULER

Tenemos la ecuación diferencial en la forma de Euler:

$$x^2G'' + xG' - 4G = 0$$

Hacemos el cambio $x = e^t$, luego:

- $\frac{dt}{dx} = e^{-t}$
- $\frac{\partial G}{\partial x} = e^{-t}\frac{\partial G}{\partial t}$
- $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = e^{-2t}(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial G}{\partial t})$

Sustituimos estos valores en la ecuación diferencial y llegamos al resultado:

$$G'' = 4G$$

Con lo que :

$$G(t,\xi) = A(\xi)e^{2t} + B(\xi)e^{-2t}$$

Deshaciendo el cambio:

$$G(x,\xi) = A(\xi)x^2 + B(\xi)x^{-2}$$