TEMA 1. Ejercicio 9

Fraire González, Juan Jesús
Gordillo Guerrero, Fernando
Fernández Fernández, Ana Belén
Gerona Plá, Federico

Noviembre 2008

Obtener en forma cerrada la función de Green para el problema inhomogéneo $y'' - 2k^2 y = f(x)$, $0 \leq x < \infty$, con las condiciones de contorno $y(0) = 0$, $y(\infty) < \infty$, si (a) $k \neq 0$, (b) $k = 0$. En ambos casos halla $y(x)$ si $f(x) = e^{-x}$.

1. Calculamos la forma cerrada la función de Green para el problema inhomogéneo:

   Si identificamos la ecuación obtenida con la forma de Sturm-Liouville:

   $$y''(x) - k^2 y(x) = f(x) \qquad \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] - s(x)y(x) + \mu \cdot r(x)y(x) = f(x)$$

   $$p(x) = 1 \qquad s(x) = 0 \qquad \mu = -k^2 \qquad r(x) = 1$$

   Mientras que las condiciones de contorno que tenemos son singulares y el dominio es el intervalo $[0, \infty)$.

   Resolvamos la ecuación diferencial homogénea asociada:

   $$y'' - k^2 y = 0 \Rightarrow (D^2 - k^2) = 0 \Rightarrow D = \pm k$$

   Sabemos que la solución es de la forma:

   $$y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$$

Así que con los resultados anteriores para $\lambda = \pm k$:

$$\boxed{y = Ae^{kx} + Be^{-kx}}$$

Aplicamos ahora las condiciones de contorno:

(a) Por la izquierda ($f(0) = 0; 0 < x \leq \xi$):

$$A_1 e^{k\cdot 0} + B_1 e^{-k\cdot 0} = 0 \Rightarrow A_1 = -B_1$$

Tenemos entonces que:

$$y_1 = A_1(e^{kx} - e^{-kx})$$

(b) Por la derecha ($f(\infty) < \infty; \xi \leq x \leq \infty$):

$$A_2 e^{k\cdot\infty} + B_2 e^{-k\infty} < \infty \Rightarrow A_2 = 0$$

Y tenemos que:

$$y_2 = B_2 e^{-kx}$$

La función de Green nos quedaría con estos cálculos:

$$\boxed{G(x,\xi) = \begin{cases} A_1(e^{kx} - e^{-kx}) & 0 < x \leq \xi \\ B_2 e^{-kx} & \xi \leq x \leq \infty \end{cases}} \tag{1}$$

Ahora hemos de exigirle la continuidad de la función, $G(x,\xi^+) = G(x,\xi^-)$, y que el salto en la derivada sea de $1/p(x)$, $G'(x,\xi^+) - G'(x,\xi^-) = 1$.

- $G(x,\xi^+) = G(x,\xi^-)$:

$$B_2 = \frac{A_1}{e^{-k\xi}}(e^{k\xi} - e^{-k\xi}) \tag{2}$$

- $G'(x,\xi^+) - G'(x,\xi^-) = 1$:

$$-B_2 k e^{-k\xi} - A_1 k(e^{k\xi} + e^{-k\xi}) = 1 \tag{3}$$

Así ahora tenemos un sistema de 2 ecuaciones, (2) y (3), con dos incógnitas, A_1 y B_2:

$$\begin{cases} B_2 = \dfrac{A_1}{e^{-k\xi}}(e^{k\xi} - e^{-k\xi}) \\ -B_2 k e^{-k\xi} - A_1 k(e^{k\xi} + e^{-k\xi}) = 1 \end{cases}$$

Si introducimos (2) en (3):

$$A_1 = -\frac{e^{-k\xi}}{2k} \tag{4}$$

Ahora sustituimos (4) en (2):

$$B_2 = -\frac{e^{k\xi} - e^{-k\xi}}{2k} \tag{5}$$

Ahora solamente tenemos que sustituir los valores de las incógnitas A_1 y B_2, dados por las ecuaciones (4) y (5), en la ecuación (1):

$$G(x,\xi) = \left\{ \begin{array}{l} A_1(e^{kx} - e^{-kx}) \\ B_2 e^{-kx} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{e^{-k\xi}}{2k}(e^{kx} - e^{-kx}) \\ -\dfrac{e^{k\xi} - e^{-k\xi}}{2k} e^{-kx} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{e^{-k\xi}}{k} \operatorname{senh} kx \\ -\dfrac{e^{-kx}}{k} \operatorname{senh} k\xi \end{array} \right.$$

Así que la solución final de la ecuación de Green para este problema de Sturm-Liouville es:

$$\boxed{G(x,\xi) = \left\{ \begin{array}{ll} -\dfrac{e^{-k\xi}}{k} \operatorname{senh} kx & 0 \leq x \leq \xi \\ -\dfrac{e^{-kx}}{k} \operatorname{senh} k\xi & \xi \leq x \leq \infty \end{array} \right. \qquad G(x,\xi) : k \neq 0} \tag{6}$$

Para calcular la ecuación de Green en el caso $k = 0$ si nos fijamos tendremos en la función de Green una indeterminación del tipo $0/0$, por lo que podremos aplicar la regla de L'Hôpital y nos quedará la función:

$$\boxed{G(x,\xi) = \left\{ \begin{array}{ll} -x & 0 \leq x \leq \xi \\ -\xi & \xi \leq x \leq \infty \end{array} \right. \qquad G(x,\xi) : k = 0} \tag{7}$$

2. A partir de (6) y (7) calculamos $y(x)$ para $f(x) = e^{-x}$.

$$y(x) = \int_0^\infty G(x,\xi) f(\xi) d\xi \tag{8}$$

   (a) Para $k \neq 0$:

$$y(x) = \int_0^x -\frac{e^{-k\xi}}{k} \operatorname{senh} kx \cdot e^{-\xi} d\xi + \int_x^\infty -\frac{e^{-kx}}{k} \operatorname{senh} k\xi \cdot e^{-\xi} d\xi$$

$$\boxed{y(x) = \frac{e^{-x} - 1}{k} \left[e^{-kx} \operatorname{senh} k\xi + e^{-k\xi} \operatorname{senh} kx \right]}$$

   (b) Para $k = 0$:

$$y(x) = \int_0^x -x e^{-\xi} d\xi + \int_x^\infty -\xi e^{-\xi} d\xi$$

$$\boxed{y(x) = 2x e^{-x}}$$