Alumnas: **Isabel María Alfonso Naranjo**
Clara Eugenia Martínez Vázquez

Métodos de la física matemática

HOJA 2

Ejercicio nº 11:

a) Demostrar que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot e^{-x^2}\, x H_n'(x) H_m'(x) = \sqrt{\pi}\, 2^{n+1} n(n+1)!\,\delta_{n,m-1} + \sqrt{\pi}\, 2^n (n-1) n!\,\delta_{n,m+1}$$

donde $H_n'(x) = dH_n(x)/dx$

b) A partir del resultado anterior demostrar que:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot e^{-x^2}\, x H_n'(x) H_{n+p}'(x) = \sqrt{\pi}\, 2^{n+1} n(n+1)!$$

Solución:

a) De las relaciones de recurrencia de los polinomios de Hermite distinguimos las siguientes:

1º) $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$

2º) $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$

Haciendo uso de la primera relación de recurrencia, expresamos las derivadas de los polinomios de Hermite que aparecen en la integral del enunciado como:

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \qquad (1)$$

$$xH_m'(x) = 2xmH_{m-1}(x) \qquad (2)$$

A continuación, hacemos uso de la segunda relación de recurrencia cambiando el índice "n" por "m-1". De esta forma podemos rescribirla como:

$$H_m(x) - 2xH_{m-1}(x) + 2(m-1)H_{m-2}(x) = 0$$

Así, despejando $2xH_{m-1}(x)$ de la relación anterior, podemos escribir (2) de la siguiente manera:

$$2xmH_{m-1}(x) = m\left[H_m(x) + 2(m-1)H_{m-2}(x)\right] \qquad (3)$$

Utilizando a las expresiones (1) y (3), la integral del enunciado quedará como sigue:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot e^{-x^2} x H_n^{'}(x) H_m^{'}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot e^{-x^2} \{2nH_{n-1}(x)\}\{2xmH_{m-1}(x)\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot e^{-x^2} \{2nH_{n-1}(x)\}\{m[H_m(x) + 2(m-1)H_{m-2}(x)]\} \\
&= 2nm\langle H_{n-1}(x) | H_m(x)\rangle + 4nm(m-1)\langle H_{n-1}(x) | H_{m-2}(x)\rangle \\
&= 2nm\sqrt{\pi}\, 2^{n-1}(n-1)!\,\delta_{n-1,m} + 4nm(m-1)\sqrt{\pi}\, 2^{n-1}(n-1)!\,\delta_{n-1,m-2}
\end{aligned}$$

Ayudándonos de las deltas de Kronecker expresamos las "m" en función de las "n":

- $n-1 = m \Rightarrow n = m+1$
- $n-1 = m-2 \Rightarrow m = n+1 \Rightarrow n = m-1$

Finalmente obtenemos la expresión que viene a continuación:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot e^{-x^2} x H_n^{'}(x) H_m^{'}(x) &= \sqrt{\pi}\, n(n-1)(n-1)! \cdot 2^n\, \delta_{n,m+1} + \sqrt{\pi}\, n(n+1)n(n-1)! \cdot 2^{n+1}\, \delta_{n,m-1} \\
&= \sqrt{\pi} \cdot 2^n (n-1) n!\, \delta_{n,m+1} + \sqrt{\pi} \cdot 2^{n+1} n(n+1)!\, \delta_{n,m-1}
\end{aligned}$$

Como podemos observar ésta es la expresión a la que queríamos llegar.

b) Haciendo uso de este resultado intentemos demostrar que:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot e^{-x^2} x H_n^{'}(x) H_{n+p}^{'}(x) = \sqrt{\pi}\, 2^{n+1} n(n+1)!$$

Relacionando esta expresión con la obtenida en el apartado a) podemos extraer las siguientes conclusiones:

- Debido a la presencia de las deltas de Kronecker, por definición de las mismas, los miembros de este sumatorio que no se anulan son aquellos en los que se cumple:

  - $\boxed{m = n + p}$. Ante esta situación distinguimos los siguientes casos:

    - $n = m - 1 \Rightarrow n = n + p - 1 \Rightarrow \boxed{p = 1}$

    - $n = m + 1 \Rightarrow n = n + p + 1 \Rightarrow \boxed{p = -1}$

  - Como podemos observar, el sumatorio recorre los números naturales desde p=0 hasta p=∞, por lo tanto p=-1 no está dentro de este sumatorio. Esto quiere decir que el término en el que está presente $\delta_{n,m+1}$ no aparece en el resultado final de este sumatorio.

  - Por tanto, el único término de la integral que interviene en el sumatorio es el debido a $\delta_{n,m-1}$

Como $n = m - 1 \Rightarrow \delta_{n,m-1} = 1$. Con lo cual el resultado final del sumatorio será:

$$\boxed{\sum_{p=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot e^{-x^2} x H_n^{'}(x) H_{n+p}^{'}(x) = \sqrt{\pi}\, 2^{n+1} n(n+1)!}$$