AMALIA TOBOSO

FERNANDO GORDILLO

ÁNGEL H.

Problema 17, HOJA 2

Los polinomios de Chebychev de primera especie (o tipo I) $T_n(x)$ **satisfacen la relación de recurrencia:** $T_{n+2}(x) = 2x \cdot T_{n+1}(x) - T_n(x)$, con $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$

a) Obtener la función generatriz:

$$G(x,t) = T_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) \cdot t^n \quad , \quad |x| \leq 1 \quad , \quad |t| < 1$$

b) Utilizar el resultado anterior para calcular:

$$T_n(0) \;,\; T_n(1) \;\text{ y }\; T_n(-1)$$

a) Partiendo de la relación de recurrencia dada: $T_{n+2}(x) = 2x \cdot T_{n+1}(x) - T_n(x)$ vamos a buscar la función generatriz, reescribiéndola en la forma siguiente:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} T_{n+2}(x) \cdot t^n}_{\begin{pmatrix} n+2=n' \Rightarrow n=n'-2 \\ n=0 \Rightarrow n'=2 \end{pmatrix}} = \underbrace{2x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} T_{n+1}(x) \cdot t^n}_{\begin{pmatrix} n+1=n' \Rightarrow n=n'-1 \\ n=0 \Rightarrow n'=1 \end{pmatrix}} - \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) \cdot t^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} T_n(x) \cdot t^{n-2} = 2x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) \cdot t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) \cdot t^n \qquad \textbf{(1)}$$

Reescribimos los sumatorios para que todos comiencen en n=0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) \cdot t^{n-2} = T_0(x) \cdot t^{-2} + T_1(x) \cdot t^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} T_n(x) \cdot t^{n-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} T_n(x) \cdot t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) \cdot t^{n-2} - T_0(x) \cdot t^{-2} - T_1(x) \cdot t^{-1} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) \cdot t^{n-1} = T_0(x) \cdot t^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) \cdot t^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) \cdot t^{n-1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) \cdot t^{n-1} - 2x \cdot T_0(x) \cdot t^{-1} \qquad \textbf{(3)}$$

Sustituyendo (2) y (3) en la expresión (1) tendremos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\cdot t^{n-2} - T_0(x)\cdot t^{-2} - T_1(x)\cdot t^{-1} = 2x\cdot\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\cdot t^{n-1} - 2x\cdot T_0(x)\cdot t^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\cdot t^n$$

y teniendo en cuenta los datos del problema

$$T_0(x) = 1 \quad \text{y} \quad T_1(x) = x,$$

resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\cdot t^{n-2} - t^{-2} + x\cdot t^{-1} = 2x\cdot\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\cdot t^{n-1} - 2x\cdot t^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\cdot t^n \qquad \textbf{(4)}$$

Por otro lado, sabemos que la función generatriz es

$$G(x,t) = T_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)\cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\cdot t^n$$

luego la expresión (4) toma la forma:

$$t^{-2}\cdot G(x,t) - t^{-2} - x\cdot t^{-1} = 2x\cdot t^{-1}\cdot G(x,t) - 2x\cdot t^{-1} - G(x,t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^{-2}\cdot G(x,t) - 2x\cdot t^{-1}\cdot G(x,t) + G(x,t) = t^{-2} - 2x\cdot t^{-1} + x\cdot t^{-1}$$

multiplicando por t^2 resulta que:

$$G(x,t) - 2x\cdot t\cdot G(x,t) + t^2\cdot G(x,t) = 1 - 2x\cdot t + x\cdot t \Rightarrow G(x,t)\cdot(1 - 2x\cdot t + t^2) = 1 - x\cdot t$$

Por lo tanto, la función generatriz es:

$$\boxed{G(x,t) = \frac{1 - x\cdot t}{1 - 2x\cdot t + t^2}} \qquad \textbf{(5)}$$

b) Para calcular $T_n(0)$, $T_n(1)$ y $T_n(-1)$ particularizaremos la ecuación **(5)** para x=0, x=1 y x=-1 obteniendo así las G(x,t) asociadas, luego desarrollaremos en serie de Taylor e identificaremos coeficientes:

$$*T_n(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} G(0,t)=\dfrac{1-0\cdot t}{1-2\cdot 0\cdot t+t^2}=\dfrac{1}{1+t^2} \\ G(0,t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cdot t^n \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cdot t^n=\frac{1}{1+t^2} \qquad \textbf{(6)}$$

Desarrollamos $\dfrac{1}{1+t^2}$ en serie de Taylor:

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2-t^4-\ldots-(-1)^n\cdot t^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot t^{2n}$$

Por lo tanto, (6) toma la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cdot t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot t^{2n} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cdot t^n \underbrace{=}_{\begin{pmatrix} 2n=n' \Rightarrow n=n'/2 \\ n=0 \Rightarrow n'=0 \end{pmatrix}} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n/2}\cdot t^n$$

Luego

$$\boxed{T_n(0)=\begin{cases} 0, n=impar \\ (-1)^{n/2}, n=par \end{cases}}$$

$$*T_n(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} G(1,t)=\dfrac{1-t}{1-2\cdot t+t^2}=\dfrac{1-t}{(1-t)^2}=\dfrac{1}{1-t} \\ G(1,t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} T_n(1)\cdot t^n \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} T_n(1)\cdot t^n=\frac{1}{1-t} \qquad \textbf{(7)}$$

Desarrollamos $\dfrac{1}{1-t}$ en serie de Taylor:

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\ldots+t^n+0\cdot t^n=\sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

Por lo tanto, (7) toma la forma: $\sum_{n=0}^{\infty} T_n(1)\cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$

Luego

$$\boxed{T_n(1)=1}$$

$$*T_n(-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} G(-1,t)=\dfrac{1+t}{1+2\cdot t+t^2}=\dfrac{1+t}{\left(1+t\right)^2}=\dfrac{1}{1+t} \\ G(-1,t)=\sum_{n=0}^{\infty} T_n(-1)\cdot t^n \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} T_n(-1)\cdot t^n = \frac{1}{1+t} \qquad \textbf{(8)}$$

Desarrollamos $\frac{1}{1+t}$ en serie de Taylor:

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2+\ldots+(-1)^n\cdot t^n+0\cdot t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$$

Por lo tanto, (8) se puede expresar como: $\sum_{n=0}^{\infty} T_n(-1)\cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot t^n$

Luego

$$\boxed{T_n(-1)=(-1)^n}$$