Métodos de la Física Matemática
Tema 2 - Ejercicio 21

Fraire González, Juan Jesús
Díaz Simón, Daniel
Valcárcel Gómez, Francisco de Borja

11 de diciembre de 2009

Sea

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \, J_n(\alpha_{nm} x)$$

la representación en serie de las funciones de Bessel de la función $f(x)$ definida en el intervalo $[0, 1]$, donde α_{nm} es la raíz m-ésima de $J_n(x)$.

1. **Probar la identidad de Parseval**

$$\int_0^1 dx\, x[f(x)]^2 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 [J_{n+1}(\alpha_{nm})]^2$$

2. **Escogiendo $f(x) = x^n$, probar que las raíces α_{nm} verifican la relación**

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{nm}^2} = \frac{1}{4(n+1)}$$

Resolución . . . .

1. Para resolver este apartado del ejercicio necesitamos hacer uso del teorema de ortogonalidad de los polinomios de Bessel:

$$\langle J_n(k_m\, x)|J_n(k_p\, x)\rangle = \int_0^a x\, dx\, J_n(k_m\, x)\, J_n(k_p\, x) = \delta_{mp}\frac{a^2}{2}[J_{n+1}(k_m\, x)]^2 \tag{1}$$

   Para llegar a una expresión análoga a la que tenemos en la ecuación (1) tenemos que introducir la expresión de $f(x)$ en la ecuación de Parseval y desarrollarla, de manera que nos quedará así:

$$\int_0^1 dx\, x[f(x)]^2 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} c_m\, c_p \int_0^1 x\, dx\, J_n(\alpha_{nm}\, x)\, J_n(\alpha_{np}\, x) \tag{2}$$

   Como vemos, podemos resolver esta ecuación a partir de su relación con la ecuación (1):

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} c_m\, c_p \int_0^1 x\, dx\, J_n(\alpha_{nm}\, x)\, J_n(\alpha_{np}\, x) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} c_m\, c_p\, \delta_{mp}\frac{1}{2}[J_{n+1}(\alpha_{nm})]^2 \tag{3}$$

   Al tener una delta de Kronecker lo que sucede es que solamente son distintos de cero los valores de la delta con en los que $n = m$ $(\delta_{11}, \delta_{22}, \ldots)$ de manera que podemos reducir los dos sumatorios a uno solo:

$$\int_0^1 dx\, x[f(x)]^2 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2\frac{1}{2}[J_{n+1}(\alpha_{nm})]^2 \tag{4}$$

2. Partimos de las siguientes expresiones para resolver este apartado

$$f(x) = x^n$$

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m\, J_n(\alpha_{nm}x)$$

   Aplicamos la identidad de Parseval del primer apartado pero sustituyendo el valor de $f(x)$ por x^n

$$\int_0^1 dx x^{2n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2\frac{1}{2}[J_{n+1}(\alpha_{nm})]^2 \tag{5}$$

   El valor de la integral es:

$$\int_0^1 dx x^{2n+1} = \frac{1}{2(n+1)} \tag{6}$$

   Calculamos el valor de c_m a partir de la expresión:

$$c_m = \frac{2}{J_{n+1}^2(\alpha_{nm})}\int_0^1 dx\, x^{n+1} J_n(\alpha_{nm}x) \tag{7}$$

así que tenemos que calcular el valor de la integral, para ello necesitamos hacer un cambio de variable $\alpha_{nm}x = y$

$$\alpha_{nm}x = y \Rightarrow dx = \frac{dy}{\alpha} \tag{8}$$

$$\int_0^1 dx\, x^{n+1} J_n(\alpha_{nm}x) = \int_0^\alpha \frac{dy}{\alpha}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{n+1} J_n(y) = \frac{1}{\alpha^{n+2}}\int_0^\alpha dy\, y^{n+1}\, J_n(y) \tag{9}$$

Ahora bien, para poder resolver la integral esta vez tenemos que utilizar la siquiente relación de recurrencia

$$\frac{d}{dx}\left[x^n\, J_n(x)\right] = x^n\, J_{n-1}(x) \tag{10}$$

Para lo cual necesitamos un cambio de índice $n+1 = n'$

$$\int_0^\alpha dy\, y^{n+1}\, J_n(y) = \int_0^\alpha dy\, y^{n'}\, J_{n'-1}(y) = y^{n'}\, J_{n'-1}(y) \tag{11}$$

y si deshacemos el cambio de índice obtenemos que

$$\int_0^\alpha dy\, y^{n+1}\, J_n(y) = y^{n+1} J_{n+1}(y) \tag{12}$$

por tanto la solución de la expresión (9) es

$$\int_0^1 dx\, x^{n+1} J_n(\alpha_{nm}x) = \frac{1}{\alpha^{n+2}}\, y^{n+1} J_{n+1}(y) \underset{\alpha_{nm}x=y}{=} \frac{1}{\alpha_{nm}}\, J_{n+1}(\alpha_{nm}) \tag{13}$$

Por lo tanto, el valor del coeficiente c_m es

$$c_m = \frac{2}{J^2_{n+1}(\alpha_{nm})}\int_0^1 dx\, x^{n+1} J_n(\alpha_{nm}x) = \frac{2}{J^{\cancel{2}}_{n+1}(\alpha_{nm})}\frac{1}{\alpha_{nm}}\,\cancel{J_{n+1}(\alpha_{nm})} = \frac{2}{J_{n+1}(\alpha_{nm})}\frac{1}{\alpha_{nm}} \tag{14}$$

Sustituimos el valor de c_m en la expresión (5) con la expresión (6) introducida ya en (5)

$$\frac{1}{2(n+1)} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \frac{1}{2}[J_{n+1}(\alpha_{nm})]^2 \Rightarrow \frac{1}{4(n+1)} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2_{nm}} \tag{15}$$

c. q. d.

$$ \tag{16}$$

Cálculos desarrollados . . . .

Expresión (2)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx\, x[f(x)]^2 &= \int_0^1 dx\, x \left[\sum_{m=1}^{\infty} c_m\, J_n(\alpha_{nm}x)\right]^2 = \int_0^1 dx\, x \sum_{m=1}^{\infty} c_m\, J_n(\alpha_{nm}x) \sum_{p=1}^{\infty} c_p\, J_n(\alpha_{np}x) = \\
&= \int_0^1 dx\, x \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} c_m\, J_n(\alpha_{nm}x) c_p\, J_n(\alpha_{np}x) = \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \int_0^1 dx\, x\, c_m\, J_n(\alpha_{nm}x)\, c_p\, J_n(\alpha_{np}x) = \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} c_m\, c_p \int_0^1 dx\, x\, J_n(\alpha_{nm}x)\, J_n(\alpha_{np}x)
\end{aligned}$$

Expresión (4)

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} c_m\, c_p\, \delta_{mp} \frac{1}{2}[J_{n+1}(\alpha_{nm}\, x)]^2 \begin{cases} \text{Si } m \neq p \Rightarrow \delta_{mp} = 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} c_m\, c_p\, \cancelto{0}{\delta_{mp}} \frac{1}{2}[J_{n+1}(\alpha_{nm})]^2 = 0 \\ \text{Si } m = p \Rightarrow \delta_{mm} = 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_m\, c_m\, \cancelto{1}{\delta_{mm}} \frac{1}{2}[J_{n+1}(\alpha_{nm})]^2 \end{cases}$$

Desarrollando la el caso en el que $m = p$

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \frac{1}{2}[J_{n+1}(\alpha_{nm})]^2$$