MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

5) a) Hallar la integral $\int_0^1 dx * xP_l(x)$, partiendo de la fórmula de recurrencia pura.
b) Hallar el desarrollo en serie de polinomios de Legendre de $f(x) = |x|$.

Solución:

a) Según vimos en teoría, la formula de recurrencia pura para los polinomios de Legendre tiene la forma:

$$(2l + 1)x\, P_l(x) = (l+1)\, P_{l+1}(x) + l\, P_{l-1}(x)$$

Si despejamos de esta expresión el término $x\, P_l$ y lo sustituimos en la integral del problema nos queda:

$$\mathrm{I} \equiv \int_0^1 dx * xP_l(x) = \int_0^1 dx \frac{l+1}{2l+1} P_{l+1}(x) + \int_0^1 dx \frac{l}{2l+1} P_{l-1}(x) =$$
$$= \frac{l+1}{2l+1}\int_0^1 dx P_{l+1}(x) + \frac{l}{2l+1}\int_0^1 dx P_{l-1}(x)\,;$$

En el ejercicio numero 4, calculamos la integral $\int_0^1 dx P_l(x)$, para $l>1$, cuyo resultado usaremos a continuación para resolver la integral I. Para ver el desarrollo de la obtención de dicha integral *véase anexo I.* En resumen obtuvimos que:

$$\int_0^1 dx P_l(x) = \begin{cases} \delta_{l,0} & \textit{si l es par} \\ (-1)^{l+3/2} \dfrac{(l+1)!}{2^{l+1}[\frac{l+1}{2}!]^2 l} & \textit{si l es impar} \end{cases}$$

Para nuestro caso, tenemos que resolver las integrales para P_{l+1} y P_{l-1}. Ambos polinomios tendrán la misma paridad ya que su índice difiere en 2. Por lo tanto el resultado de nuestras integrales será:

$$\int_0^1 dx P_{l+1}(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si l es IMPAR} \\ (-1)^{l+4/2} \dfrac{(l+2)!}{2^{l+2}[(\frac{l+2}{2})!]^2 (l+1)} & \textit{si l es PAR} \end{cases}$$

La $\delta_{l+1,0}$ es siempre nula ya que seria $\delta_{l,-1}$ y definimos a l para valores mayor a 1.

$$\int_0^1 dxP_{l-1}(x) = \begin{cases} \delta_{l,1} & \text{si l es IMPAR} \\ \\ (-1)^{l+2/2}\dfrac{(l)!}{2^l[(\frac{l}{2})!]^2(l-1)} & \text{si l es PAR} \end{cases}$$

Por lo tanto si seguimos el cálculo matemático, tendremos dos casos:

$$\mathrm{I} = \frac{l+1}{2l+1}\int_0^1 dxP_{l+1}(x) + \frac{l}{2l+1}\int_0^1 dxP_{l-1}(x) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{l+1}{2l+1}\times 0 + \dfrac{l}{2l+1}\delta_{l,1} = \dfrac{l}{2l+1}\delta_{l,1} & \text{si l es IMPAR} \\ \\ \dfrac{l+1}{2l+1}[(-1)^{l+4/2}\dfrac{(l+2)!}{2^{l+2}[(\frac{l+2}{2})!]^2(l+1)}] + \dfrac{l}{2l+1}[(-1)^{l+2/2}\dfrac{(l)!}{2^l[(\frac{l}{2})!]^2(l-1)}] & \text{si l es PAR} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{l}{2l+1}\delta_{l,1} = 1/3\,\delta_{l,1} & \text{si l es IMPAR} \\ \\ \dfrac{(-1)^{l/2}}{2^l(2l+1)}[\dfrac{(l+2)!}{4[(\frac{l+2}{2})!]^2}] + l(-1)\,\dfrac{(l)!}{[(\frac{l}{2})!]^2(l-1)}] & \text{si l es PAR} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1/3\,\delta_{l,1} & \text{si l es IMPAR} \\ \\ \dfrac{(-1)^{l/2}(l)!}{2^l(2l+1)(\frac{l}{2})!]^2}[\dfrac{(l+1)(l+2)}{4(\frac{l+2}{2})^2} + \dfrac{(-l)}{(l-1)}] & \text{si l es PAR} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1/3\,\delta_{l,1} & \text{si l es IMPAR} \\ \\ \dfrac{(-1)^{l/2}(l)!}{2^l(2l+1)(\frac{l}{2})!]^2}[\dfrac{l+1}{l+2} + \dfrac{(-l)}{l-1}] & \text{si l es PAR} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3}\delta_{l,1} & \underline{si\ l\ es\ IMPAR} \\ \\ \dfrac{(-1)^{l/2}(l)!}{2^l(2l+1)[(\frac{l}{2})!]^2}[\dfrac{l+1}{l+2}+\dfrac{(-l)}{l-1}] & \underline{si\ l\ es\ PAR} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3}\delta_{l,1} & \underline{si\ l\ es\ IMPAR} \\ \\ \dfrac{(-1)^{l/2}(l)!}{2^l(2l+1)[(\frac{l}{2})!]^2}[\dfrac{l+1}{l+2}+\dfrac{(-l)}{l-1}] & \underline{si\ l\ es\ PAR} \end{cases}$$

Podemos concluir que la solución de este apartado nos quedaría como:

$$\boxed{\mathrm{I} = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\delta_{l,1} & \underline{si\ l\ es\ IMPAR} \\ \\ \dfrac{(-1)^{l+2/2}(l)!}{2^l[(\frac{l}{2})!]^2}[\dfrac{1}{(l+2)(l-1)}] & \underline{si\ l\ es\ PAR} \end{cases}}$$

b) Tenemos que desarrollar la función f(x) = |x| en series de polinomios de Legendre. El desarrollo de esta función viene dado por la siguiente expresión (vista en teoría):

$$|x| = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x)$$

Si nos fijamos, los terminos impares de la serie van a ser nulos dado que los coeficientes impares C_{2l+1} son proporcionales a la integral de |x|P_{2l+1} (x), definida en el intervalo [-1,1] (dominio de definición de los polinomios de Legendre, es nula ya que dicho intervalo es simétrico en torno a x = 0 y el integrando es impar (resultado del producto de una función par "|x|" por una función impar P_{2l+1} (x)).

Por lo tanto el desarrollo en serie nos queda como:

$$|x| = \sum_{l=0}^{\infty} c_{2l} P_{2l}(x)$$

Según vimos en teoría, los coeficientes del desarrollo en serie vienen dados por la expresión siguiente:

$$c_{2l} = \frac{\langle P_{2l} \| x | \rangle}{\| P_{2l} \|^2} = \frac{4l+1}{2} \int_{-1}^{1} dx\, | x | P_{2l}(x)$$

Dado que la integrando es una función par, la integral completa se nos reduce al doble de la integral en el intervalo [0,1]:

$$c_{2l} = \frac{4l+1}{2} * 2 \int_{0}^{1} dx * x P_{2l}(x) = (4l+1) \int_{0}^{1} x P_{2l}(x) dx$$

La integral $\int_{0}^{1} x P_{2l}(x) dx$, la hemos resuelto en el apartado a) para el caso general de Pl. En este caso en el que el polinomio tiene solamente términos de orden par, de la solución que obtuvimos, solo nos quedaremos con la solución para l par, que es:

$$\int_{0}^{1} x P_{2l}(x) dx = \frac{(-1)(2l)!}{2^{2l}[(l)!]^2} [\frac{1}{(2l+2)(2l-1)}]$$

Por lo tanto los coeficientes tienen la forma:

$$c_{2l} = \frac{(-1)(2l)!}{2^{2l}[(l)!]^2} [\frac{1}{(2l+2)(2l-1)}] \times (4l+1)$$

Con lo que el desarrollo en serie de la función valor absoluto de x, nos queda:

$$\Rightarrow \boxed{\text{f(x)} = |\text{x}| = \sum_{l=1}^{\infty} -\frac{(2l)!}{2^{2l}[(l)!]^2} [\frac{(4l+1)}{(2l+2)(2l-1)}] P_{2l}(x)}$$

ALMUDENA SÁNCHEZ RODRÍGUEZ
JESÚS CINTAS LEAL

ANEXO I:

En este apartado vamos a desarrollar el cálculo del ejercicio número 4, en el que nos piden calcular la integral:

$$\int_0^1 dxP_l(x)$$

Partiendo de la función generatriz:

$$G(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)$$

Integrando ambas partes, nos queda:

$$\int_0^1 (1-2xt+t^2)^{-1/2} dx = \int_0^1 \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l \int_0^1 dxP_l(x)$$

Desarrollando en serie de Taylor la parte de la izquierda:

$$-\frac{1}{t}*(1-t)+\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} = 1-\frac{1}{t}+\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l \int_0^1 dxP_l(x)$$

Desarrollando el término $(1+t^2)^{1/2}$:

$$(1+t^2)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{t^4}{2!}+\frac{1}{4}*\frac{3}{2}\frac{t^6}{3!}+... = 1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}*(2l-1)!!}{2^l l!*(2l-1)}t^{2l} \Rightarrow$$

sabiendo que:

$$(2l-1)!! = \frac{(2l)!}{2^l l!}$$

$$\Rightarrow = 1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}(2l)!}{2^{2l}(l!)^2*(2l-1)}t^{2l}$$

Sustituyendo este resultado nos queda que:

$$1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t}+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}(2l)!}{2^{2l}(l!)^2*(2l-1)}t^{2l+1} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l \int_0^1 dxP_l(x)$$

Hacemos el cambio:

$$2l-1 = l` \Rightarrow l = \frac{l`+1}{2}$$

E identificando los coeficientes que acompañan a t^l nos queda que la integral es:

$$\int_0^1 dx P_l(x) = \begin{cases} \delta_{l,0} & \text{si l es par} \\ \\ (-1)^{l+3/2} \dfrac{(l+1)!}{2^{l+1}[\frac{l+1}{2}!]^2 l} & \text{si l es impar} \end{cases}$$