Jesus Miguel Simón Martín, Santos Zambrano Agudo, Carlos Miguel Álvarez González

Ejercicio 11.-

a)Demostrar que:

$\int$dxe$^{-x^2}$xH$'_n$(x)H$'_m$(x)=$\sqrt{\pi}2^{n+1}$n(n+1)!$\delta_{n,m-1}$+$\sqrt{\pi}2^n(n-1)n!\delta_{n,m+1}$

Tenemos

1) 2xH$_n(x) = H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}$

2)H$'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$

3)$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2} = \|H_n\|^2 = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{n,m}$

Así aplicando 2):

$\int$dxe$^{-x^2}$xH$'_n$(x)H$'_m$(x)=2nm$\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2}2xH_{n-1}(x)H_{m-1}(x)$

Y seguidamente aplicando 1):

2nm$\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2}2xH_{n-1}(x)H_{m-1}(x)$=2nm($\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_{m-1}(x)e^{-x^2}$+2(n-1)$\int_{-\infty}^{\infty} dxH_{n-2}(x)H_{m-1}(x)$)

Y por último mediante 3) obtenemos:

2nm($\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_{m-1}(x)e^{-x^2}$+2(n-1)$\int_{-\infty}^{\infty} dxH_{n-2}(x)H_{m-1}(x)$)=2nm($2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{n,m-1}$+$2^{n-2}(n-2)!\sqrt{\pi}\delta_{n-2,m-1}$)

o bien dado que n=m-1 en el primer término entre paréntesis y n=m+1 en el segundo término resulta:

$\int$dxe$^{-x^2}$xH$'_n$(x)H$'_m$(x)=$\sqrt{\pi}2^{n+1}$n(n+1)!$\delta_{n,m-1}$+$\sqrt{\pi}2^n(n-1)n!\delta_{n,m+1}$

b)A partir del resultado anterior , demostrar que:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2}x\mathrm{H}'_n(\mathrm{x})\mathrm{H}'_{n+p}(\mathrm{x})=\sqrt{\pi}2^{n+1}n(n+1)!$$

Por el resultado anterior es evidente que alguno de los dos términos será no nulo si n=n+p-1 o bien si

n=n+p+1,

es decir p=1 y p=-1.

Y dado que p$\geq$ 0 el único caso posible es p=1 para el cual sobrevive el primer término, y por tanto

$$\sum_{p=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2}x\mathrm{H}'_n(\mathrm{x})\mathrm{H}'_{n+p}(\mathrm{x})=\sqrt{\pi}2^{n+1}n(n+1)!$$