Sean $f_n(x)$ las funciones definidas mediante las relaciones:

$$f_0(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{(r!)^2} \quad , \quad (n+1)f_{n+1}=xf_n-f_{n+2} \quad , \quad f_n^{'}=f_{n-1}$$

Demostrar que la función generatriz $G(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x)t^n$ viene dada por $\exp(xt+1/t)$

De la primera relación de recurrencia deducimos:

$$(n+1)f_{n+1}=xf_n-f_{n+2}\Rightarrow\sum_{n=-\infty}^{\infty}(n+1)f_{n+1}t^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}xf_nt^n-\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_{n+2}t^n=x\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^n f_n(x)}_{G(x,t)}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^n f_{n+2}(x)$$

Hacemos un cambio de índice:

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}nf_nt^{n-1}}_{\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}}=x\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_nt^n}_{G(x,t)}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_nt^{n-2}\Rightarrow\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}=xG(x,t)-t^{-2}\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_nt^n}_{G(x,t)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}=xG(x,t)-t^{-2}G(x,t)\Rightarrow\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}=(x-t^{-2})G(x,t)$$

Integramos:

$$\Rightarrow\int\frac{dG(x,t)}{G(x,t)}=\int(x-t^{-2})dt\Rightarrow\ln G(x,t)=xt+\frac{1}{t}+\ln\varphi(x)\Rightarrow\quad G(x,t)=\varphi(x)e^{xt+\frac{1}{t}} \quad (1)$$

Ahora calcularemos el valor de $\varphi(x)$.

Utilizando la segunda relación de recurrencia: $f_n^{'}=f_{n-1}\Rightarrow\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n^{'}(x)t^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_{n-1}(x)t^n$

Por otro lado: $G(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n(x)t^n\Rightarrow\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^nf_n^{'}(x)$

Así :

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^nf_{n-1}(x)=\text{cambio de índice: } n-1=n'\Rightarrow n=n'+1=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^{n'+1}f_{n'}(x)=t\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^{n'}f_{n'}(x)\ \Rightarrow\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}=tG(x,t)\quad (2)$$

Por otro lado, de (1) obtenemos que:

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\varphi'(x)e^{xt+\frac{1}{t}}+t\varphi(x)e^{xt+\frac{1}{t}}=\left[\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}+t\right]\varphi(x)e^{xt+\frac{1}{t}}\quad (3)$$

Para que las expresiones (2) y (3) sean iguales tiene que ocurrir que:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=0\Rightarrow\varphi'(x)=0\Rightarrow\varphi(x)=cte$$

Calculamos la constante c,
Desarrollamos G(x,t) en serie de potencias (desarrollando en serie de Taylor):

$$G(x,t) = c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(xt+t^{-1})^n = \text{desarrollo por el binomio de Newton} =$$

$$= c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(xt)^m(t^{-1})^{n-m} \Rightarrow G(x,t) = c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\cancel{n!}}\sum_{m=0}^{n}\frac{\cancel{n!}}{(n-m)m!}x^m t^{2m-n} = c\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{x^m t^{2m-n}}{(n-m)!m!}$$

Por otro lado sabemos que: $G(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x)t^n = f_0(x) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} t^n f_n(x)$

Así, cuando $n = 2m \Rightarrow t^0 = 1 \Rightarrow$ los coeficientes $f_0(x)$ son los que acompañan a t^0.
Por lo tanto:

$$f_0(x) = c\sum_{\substack{n=0 \\ n=pares}}^{\infty}\frac{1}{(n-\frac{n}{2})!\frac{n}{2}!}x^{n/2} = c\sum_{\substack{n=0 \\ n=pares}}^{\infty}\frac{x^{n/2}}{\left[(\frac{n}{2})!\right]^2} \Rightarrow \text{cambio de índice } r = n/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_0(x) = c\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{(r!)^2} \quad (4)$$

En el enunciado del problema se nos dice que: $f_0(x) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{(r!)^2}$ (5)

Para que (4) y (5) sean iguales se debe cumplir que $c = 1$

Así pues llegamos a que $G(x,t) = e^{xt+\frac{1}{t}}$ como queríamos demostrar.