22-Calcular la transformada de Laplace de J_0 (ax) , donde $-\infty < a < \infty$

En este ejercicio usaremos el resultado del ejercicio 19 donde obtuvimos que la función de Bessel J_0 (x):

$$J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\sin\varphi}\, d\varphi$$

El resultado es igualmente válido si tenemos $J_0(ax)$ siendo en este caso:

$$J_0(ax)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iax\sin\varphi}\, d\varphi$$

Una vez definida la función de esta forma procedemos a calcular su transformada de Laplace

$$\mathscr{L}[f(x)]=\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx=F(s)$$

Llevando nuestra función f(x)= J_0 (ax) tenemos:

$$\mathscr{L}[J_0(ax)]=\int_0^{\infty} e^{-sx}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\sin\varphi}\, d\varphi\, dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\infty} e^{x(ia\sin\varphi-s)}dx$$

Integrando obtenemos:

$$\mathscr{L}[J_0(ax)]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{d\varphi}{ia\sin\varphi-s}\right)e^{x(ia\sin\varphi-s)}\Big|_0^{\infty}$$

Aplicando los limites podemos ver que en el caso de infinito prevalece el termino e^{-sx} sobre el termino $e^{xia\sin\varphi}$; el primero vale 0 y el segundo oscila debido a que $e^{xia\sin\varphi}=\cos(a\sin\varphi\, x)+i\sin(a\sin\varphi\, x)$ es una función acotada. Por lo tanto nos queda el valor de la función en el 0 que es 1, y que aplicando la regla de Barrow es un -1 . Por tanto la transformada nos queda:

$$\mathscr{L}[J_0(ax)]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{d\varphi}{s-ia\sin\varphi}\right)$$

Para resolver esta integral nos vamos al plano complejo para aplicar el teorema del residuo.

Para ello hacemos el cambio $z=e^{i\varphi}$

Por lo tanto $\sin\varphi=\frac{z^2-1}{2iz}$ y $d\varphi=\frac{dz}{2iz}$

Sustituyendo en la integral tenemos:

$$F(s)=\frac{1}{2\pi}\oint_c \left(\frac{dz}{iz\left(s-ia\frac{z^2-1}{2iz}\right)}\right)$$

Donde C es : $C=z|z|=1$

Si operamos correctamente sacando factor común y quedando 1 uno en el coeficiente de mayor grado en el denominador, nos queda:

$$\pm\pm\square\ F(s)=\frac{1}{\pi i}\oint_c \left(\frac{dz}{-z^2+\frac{2s}{a}z+1}\right)$$

Veamos los polos de la función $f(x)=\dfrac{1}{-z^2+\frac{2s}{a}z+1}$

resolviendo obtenemos dos valores:

$$z_1=\left(\frac{-s}{a}\right)-\left(\frac{\sqrt{s^2+a^2}}{a}\right)$$

$$z_2=\left(\frac{-s}{a}\right)+\left(\frac{\sqrt{s^2+a^2}}{a}\right)$$

El teorema del residuo dice :

$$\oint_c f(z)\,dz=2\pi i\sum b_i$$

Ahora debemos ver cual de los polos cae dentro de nuestro camino de integración para así calcular su residuo en este caso podemos ver que para $\frac{s}{a}>1$ z_1 cae dentro.

Para $\frac{s}{a}<1$ también es z_1 el que cae dentro por tanto el único que contribuye al valor de la integral es el residuo del polo z_1.

El residuo será :

$$b=\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}=\frac{1}{(z+\frac{s}{a}-\frac{\sqrt{s^2+a^2}}{a})}=\frac{+a}{2\sqrt{s^2+a^2}}$$

$$b=\lim_{z\to z_1=(\frac{s}{a})-(\frac{\sqrt{s^2+a^2}}{a})}(z+\frac{s}{a}+\frac{\sqrt{s^2+a^2}}{a})\frac{1}{(z+\frac{s}{a}-\frac{\sqrt{s^2+a^2}}{a})(z+\frac{s}{a}+\frac{\sqrt{s^2+a^2}}{a})}=\frac{+a}{2\sqrt{s^2+a^2}}$$

Por lo tanto el valor de nuestra función aplicando el teorema del residuo es :

$$L[J_0(ax)]=\frac{2\pi i}{\pi i}b_1=\frac{+a}{\sqrt{s^2+a^2}}$$