Métodos de la Física Matemática (2010/2011)

Mª del Rocío Calero Fernández-Cortés
Leticia Jaén Tapia
María Jesús Jiménez Donaire

Ejercicio 6.- La función generatriz asociada a los polinomios de Chebichev $U_n(x)$ de tipo II viene dada por:

$$G(x,t) = \exp[2xt - t^2] = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) \cdot t^n$$

Obtener el valor de $U_n'(0)$ a partir de dicha función generatriz.

Para resolver el problema nos fijamos primeramente en que lo que nos piden hallar es la derivada de los polinomios de Chebichev en el punto $x = 0$.

Esto ya nos da una idea de que debemos hacer la derivada de la función generatriz respecto de x, ya que es la única variable de la que dependen estos polinomios.

De este modo:

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = 2t \cdot \exp[2xt - t^2] = 2t \cdot G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n'(x) \cdot t^n$$

Como nos piden $U_n'(0)$, particularizamos el resultado anterior para $x = 0$:

$$2t \cdot G(0,t) = 2t \cdot \exp[-t^2] = \sum_{n=0}^{\infty} U_n'(0) \cdot t^n$$

Lo que podemos ver en el resultado anterior es realmente el desarrollo en serie del producto de una función exponencial y una polinómica como combinación lineal de los polinomios de Chebichev; luego para poder identificar los coeficientes del desarrollo debemos previamente escribir la función exponencial en desarrollo en serie de Taylor:

$$\exp[x] = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

En nuestro caso $x=-t^2$, por tanto el desarrollo:

$$\exp[-t^2]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}$$

Por tanto, si sustituimos en la identidad:

$$2t\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^n}{n!}=2t\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot t^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}U_n{}'(0)\cdot t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2\frac{(-1)^n}{n!}\cdot t^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}U_n{}'(0)\cdot t^n$$

Desarrollamos un poco la expresión:

$$2t-2t^3+t^5-\ldots=U_0{}'(0)+U_1{}'(0)\cdot t+U_2{}'(0)\cdot t^2+U_3{}'(0)\cdot t^3+\ldots$$

De esta forma podemos darnos cuenta de que en el término de la izquierda del desarrollo no existe el término independiente y además solamente tenemos potencias impares en t, por tanto $U_0{}'(0)$ ha de ser 0 y todos los coeficientes que acompañen a potencias pares de t a la derecha del desarrollo deben ser 0 de igual modo.

Para las potencias impares en t haremos el cambio siguiente en el primer sumatorio:

$$2n+1\rightarrow n' \quad \Rightarrow n=\frac{n'-1}{2}$$

Luego:

$$\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\cdot t^n=\sum_{n=0}^{\infty}U_n{}'(0)\cdot t^n \text{ , para } n \text{ impar}$$

Pero como hemos deducido que $U_0{}'(0)=0$, podemos escribir el desarrollo de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\cdot t^n=U_0{}'(0)+\sum_{n=1}^{\infty}U_n{}'(0)\cdot t^n \text{ , para } n \text{ impar}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{\left((n-1)/2\right)!}\cdot t^n = \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(0)\cdot t^n$$, para n impar

$$2\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{\left((n-1)/2\right)!} = U_n'(0)$$, para n impar

Por tanto la solución al problema planteado será:

1. $\boxed{U_0'(0)=0}$
2. $\boxed{U_n'(0)=0}$, si n es par.
3. $\boxed{2\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{\left((n-1)/2\right)!} = U_n'(0)}$, si n es impar.