Curso: **2009/10**
Alumnas: **Clara Eugenia Martínez Vázquez**
Isabel María Alfonso Naranjo

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

HOJA Nº 3: Ejercicio 11

Hallar mediante el método de la transformada de Laplace la solución del siguiente problema de difusión:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} - \boldsymbol{\gamma}^2(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}} \qquad \mathbf{0 \le x \le 1, \qquad t > 0}$$

Con condiciones de contorno:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x=0}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x=1}} = \mathbf{0}$$

Y condición inicial u(x,0) = $\mathbf{u}_0$.

*Como podemos ver **t→∞** y "x" se encuentra limitado, con lo cual, tomaremos la Transformada de Laplace respecto al tiempo.*

$$U(x,s) = \int_0^{\infty} dt\, e^{-st}\, u(x,t)$$

Aplicándole, además, la condición inicial que se nos proporciona en el enunciado, tendremos pues:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,s) - \left(U(x,s) - \frac{u_1}{s}\right)\gamma^2 = sU(x,s) - u_0$$

Reordenando la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,s) - U(x,s)(\gamma^2 + s) + \left(\boldsymbol{\gamma}^2 \frac{\boldsymbol{u_1}}{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{u_0}\right) = 0$$

Resaltando en negrita el término independiente vemos que se trata de una ecuación en derivadas parciales inhomogénea. Necesitaremos, por tanto:

- *Una solución particular:*

Up=U(x,s)=cte

Aplicándola a la ecuación en derivadas parciales, obtenemos:

$$Up(x,s)(\gamma^2+s)=\gamma^2\frac{u_1}{s}+u_0$$

Con lo cual:

$$Up(x,s)=\frac{\gamma^2 u_1+s(u_0)}{s(\gamma^2+s)}=\frac{\gamma^2 u_1}{s(\gamma^2+s)}+\frac{u_0}{\gamma^2+s}$$

Puede comprobarse que esta solución particular cumple las condiciones de contornos y la ecuación diferencial.

- *Suprimimos el término independiente para resolver, ahora, la ecuación homogénea:*

$$\frac{\partial^2 U_H}{\partial x^2}(x,s)-\ U_H(x,s)(\gamma^2+s)=0$$

Calculando las raíces tenemos $\boldsymbol{r=\pm\sqrt{(\gamma^2+s)}}$

Luego, la solución homogénea será del tipo:

$$U_H(x,s)=A\ e^{x\sqrt{(\gamma^2+s)}}+B\ e^{-x\sqrt{(\gamma^2+s)}}$$

- *Ahora ya podemos sumar ambas soluciones para obtener la total, tal que:*

$$U(x,s)=Up(x,s)+U_H(x,s)=\frac{\gamma^2 u_1+s(u_0)}{s(\gamma^2+s)}+A\ e^{x\sqrt{(\gamma^2+s)}}+B\ e^{-x\sqrt{(\gamma^2+s)}}$$

Usando las condiciones de contorno:

1. $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}=0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{\frac{\partial u(x,s)}{\partial x}\Big|_{x=0}=0}$

Derivando U(x,s) y haciendo x=0 tendremos :

$$\sqrt{(\gamma^2+s)}\,A-\sqrt{(\gamma^2+s)}\,B=0$$

Obteniendo de aquí que A=B

2. $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=1}=0 \Rightarrow \boldsymbol{\frac{\partial u(x,s)}{\partial x}\Big|_{x=1}=0}$

Análogamente, para esta condición de contorno, tenemos:

$$\sqrt{(\gamma^2+s)}\,A\,e^{\sqrt{(\gamma^2+s)}}=\sqrt{(\gamma^2+s)}Be^{-\sqrt{(\gamma^2+s)}}$$

Como antes obtuvimos que A=B, de esta condición:

$e^{2\sqrt{(\gamma^2+s)}}=0$*, lo cual no puede ocurrir*

Luego, A=0=B.

- *Pudiendo reducirse la ecuación a:*

$$U(x,s)=\frac{\gamma^2 u_1+s(u_0)}{s(\gamma^2+s)}=\frac{\gamma^2 u_1}{s(\gamma^2+s)}+\frac{u_0}{\gamma^2+s}$$

- *Tomaremos ahora la Transformada Inversa de Laplace para hallar la solución en el dominio del tiempo:*

$$u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}\{U(x,s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{\gamma^2 u_1+s(u_0)}{s(\gamma^2+s)}\}=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{\gamma^2 u_1}{s(\gamma^2+s)}+\frac{u_0}{\gamma^2+s}\}$$

De las tablas obtenemos que:

- $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{u_0}{\gamma^2+s}\}=u_0e^{-\gamma^2 t}$

- $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{\gamma^2 u_1}{s(\gamma^2+s)}\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{u_1}{s}-\frac{u_1}{\gamma^2+s}\right\}=u_1-u_1e^{-\gamma^2 t}$

- *Luego, la solución será:*

$$u(x,t)= u_0 e^{-\gamma^2 t}+u_1 - u_1 e^{-\gamma^2 t}$$

Pudiendo escribirla también como:

$$\boxed{\mathbf{u(x,t)}= e^{-\gamma^2 t}(u_0 - u_1) + u_1}$$