Sara Benítez Berrocal

Sara Gutiérrez López

Hoja 3:

Ejercicio 13

La temperatura en una varilla cilíndrica infinita de radio *a* satisface la ecuación diferencial,

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right] T$$

con las condiciones:

$T = 0$ **en** $t = 0$
$T = T_0 \cos \varphi$ **en** $r = a$

a) **Comprobar que la solución estacionaria es de la forma $T = f(r)\cos\varphi$, hallando $f(r)$.**
b) **Utilizando el método de separación de variables, encontrar la solución general del problema.**

Nota: téngase en cuenta que $T(r,\varphi,t)$ debe estar definida para $r = 0$ y ser una función periódica de periodo 2π en φ para todo t.

a)

Analizando nuestro sistema físico, tenemos que la varilla está sumergida en un baño térmico a una cierta temperatura, por lo que nuestro cilindro alcanzará el equilibrio térmico con el baño a un tiempo finito.

Como las condiciones de contorno son inhomogéneas, hay que buscar una solución particular y una solución general.

Calculemos la homogénea de la solución particular:

En $t = 0$ $\qquad \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T = 0$

Sustituimos el valor de T:

$$\nabla^2 f(r) \cos\varphi = 0$$

Calculamos el valor del Laplaciano y lo sustituimos en la ecuación:

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] f(r)\,cos\,\varphi = 0$$

Preparamos la ecuación y hacemos la parcial respecto de φ en el segundo término:

$$\left[\frac{cos\,\varphi}{r}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial r}+\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}\right)-\frac{1}{r^2}\,cos\,\varphi\right]=0$$

Multiplicando por r^2 para simplificar, obtenemos la siguiente ecuación de Euler:

$$r^2 f'' + r f' - f = 0$$

Basándonos en el método de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes variables, nos queda:

$$f'' - f = 0$$

Resolviendo, obtenemos las siguientes soluciones:

$$f(r) = c_1\,r^1 + c_2\,r^{-1}$$

Descartamos el término r^{-1} ya que en $r = 0$ es una solución singular.

Sustituimos $f(r)$ en nuestra solución estacionaria $T = f(r)\,cos\,\varphi$,

$$T = c\,r\,cos\,\varphi$$

Identificando con nuestra condición de contorno, tenemos que nuestra $T_0 = c\,a$, por tanto nuestra solución estacionaria quedaría, finalmente:

$$T = \frac{T_0}{a}\,r\,cos\,\varphi$$

b)

Nuestra función es de la siguiente forma,

$$\boldsymbol{T(r,\varphi,t) = R(r)\Phi(\varphi)\theta(t)}$$

Para aplicar el método de separación de variables, sustituimos en la ecuación diferencial,

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right]T$$

Para hacer más sencillos los cálculos, realizamos las operaciones con cada parte de la ecuación por separado.

El primer término de la igualdad,

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial R(r)\Phi(\varphi)\theta(t)}{\partial t} = \frac{1}{\lambda}R(r)\Phi(\varphi)\frac{\partial \theta(t)}{\partial t}$$

El primer término de la segunda parte de la igualdad,

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]T = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]$$

y sustituyendo el valor de $\boldsymbol{T}$,

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)\Phi(\varphi)\theta(t)}{\partial r}\right)\right] = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\Phi(\varphi)\theta(t)\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)\right] = \frac{\Phi(\varphi)\theta(t)}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)$$

Y por último el segundo término de la parte derecha de la igualdad,

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(R(r)\Phi(\varphi)\theta(t)) \rightarrow \frac{R(r)\theta(t)}{r^2}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2}$$

Sustituyendo todas las operaciones que acabamos de realizar, en nuestra ecuación principal,

$$\frac{1}{\lambda}R(r)\Phi(\varphi)\frac{\partial\theta(t)}{\partial t}=\frac{\Phi(\varphi)\theta(t)}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\ R(r)}{\partial r}\right)+\frac{R(r)\theta(t)}{r^2}\ \frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}$$

Dividimos la ecuación por $R(r)\Phi(\varphi)\theta(t)$,

$$\frac{1}{\lambda\theta(t)}\frac{\partial\theta(t)}{\partial t}=\frac{1}{rR(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\ R(r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\Phi(\varphi)}\ \frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=-k^2$$

Vamos a trabajar diferenciando cada variable por separado y buscamos la solución de la ecuación diferencial.

Para la variable $\theta(t)$,

$$\frac{1}{\lambda\theta(t)}\frac{\partial\theta(t)}{\partial t}=-k^2$$

Resolviendo obtenemos,

$$\theta(t)=A\ e^{-k^2\lambda t}$$

Ahora para la siguiente variable $\Phi(\varphi)$. Preparamos la ecuación multiplicando por r^2

$$\frac{r}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\ R(r)}{\partial r}\right)+k^2r^2=-\ \frac{1}{\Phi(\varphi)}\ \frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=m^2$$

por tanto, nuestra ecuación a resolver es la siguiente,

$$-\frac{1}{\Phi(\varphi)}\ \frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=m^2$$

cuya solución es,

$$\Phi(\varphi)=(A\ sen\ m\varphi+B\ cos\ m\varphi)$$

Y por último la variable $\boldsymbol{R(r)}$

$$\frac{r}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\ R(r)}{\partial r}\right)+k^2r^2=m^2$$

Calculamos la derivada del producto en nuestra ecuación y multiplicamos por $\boldsymbol{R}$, teniendo como resultado,

$$r^2\frac{d^2\ R(r)}{dr^2}+r\frac{d\,R(r)}{dr}+\left(k^2r^2-m^2\right)=0$$

Que es similar a una ecuación de Bessel, por tanto, hacemos el cambio de variable $\boldsymbol{r=x}$

$$x^2\frac{d^2\ R(r)}{dx^2}+x\frac{d\,R(r)}{dx}+\left(k^2x^2-m^2\right)R=0$$

Cuya solución es de la forma,

$$y=c_1J_m\ (kr)+\ c_2\,N_m\ (kr)$$

Ahora exigimos que se cumplan las condiciones de contorno homogéneas, tenemos los siguientes casos:

En $\boldsymbol{r=0}$, esperamos que la temperatura sea finita, como contamos con un punto singular debemos descartar el segundo término, por tanto $\boldsymbol{c_2\ =0.}$

En $\boldsymbol{r=a}$, tenemos que $\boldsymbol{R(a)=0}$, por tanto, $\boldsymbol{J_m\ (ka)\ =\ 0,}$ por lo que las raíces de esta ecuación son,

$$ka=\alpha_{mn}\quad n=1,2,3\ldots.$$

Por lo tanto,

$$k=\frac{\alpha_{mn}}{a}\quad n=1,2,3\ldots.$$

Si sustituimos en la ecuación principal todas las soluciones y nos queda,

$$T(r,\varphi,t)=\ \frac{T_0r}{a_0}\ cos\ \varphi+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha_{mn}^2kt/a^2}J_m\ (\frac{\alpha_{mn}}{a}r)(A_{mn}\ cos\ m\varphi+B_{mn}sen\ m\varphi)$$

Aplicamos la condición inicial e igualamos la ecuación a 0.

Despejamos el primer término,

$$-\frac{T_0 r}{a_0}\cos\varphi = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} e^0 J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r\right)(A_{mn}\cos m\varphi + B_{mn} sen\, m\varphi)$$

Como ambos términos de la igualdad tienen que ser iguales, debemos descartar el seno del segundo término. Como el seno no puede ser **0**, el coeficiente que lo acompaña será igual a **0**, por tanto, ***B = 0***.

La igualdad por tanto quedaría,

$$-\frac{T_0 r}{a_0} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r\right)$$

Como en la primera parte de la igualdad tenemos un armónico y en la segunda parte al tener el sumatorio tenemos infinitos, debemos particularizar para ***m*=1**, por tanto,

$$A_{mn} = A_{1n}\,\delta_{m1}$$

por lo que tendríamos,

$$-\frac{T_0 r}{a_0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} J_1\left(\frac{\alpha_{1n}}{a} r\right)$$

Por la condición de ortogonalidad de Bessel tenemos que:

$$A_{1n} = \frac{\int_a^b dx\, x\, J_1\,(kr)\varphi(x)}{\frac{1}{2} b^2 [J_2\,(\alpha)]^2}$$

Sustituyendo, por tanto, con las condiciones de nuestro problema:

$$\boldsymbol{A_{mn}} = \frac{2}{a^2[J_2\,(\alpha)]^2}\int_0^a \boldsymbol{dr\, r\, J_1\,(kr)}\left(-\frac{T_0 r}{a_0}\right) =$$

$$=\frac{-2T_0}{a^2[J_2\,(\alpha)]^2}\int_0^a \boldsymbol{dr\, r}\,\frac{r}{a_0}\,\boldsymbol{J_1}\,\left(\frac{\alpha_{1n}}{a}\boldsymbol{r}\right)$$

Haciendo un cambio de variable de ***r*** por ***x***, tendríamos:

$$\boldsymbol{A_{mn}} = \frac{-2T_0}{[J_2\,(\alpha)]^2}\int_0^1 \boldsymbol{dx\, x^2\, J_1\,(\alpha_{1n}x)}$$