MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

14) Hallar la distribución de temperaturas u(x,t) de una barra que inicialmente se encuentra a una temperatura cero (u(x,0)=0), mantiene los extremos a esa temperatura (u(±1,t)=0) y posee en su interior una fuente de calor constante. La ecuación de difusión es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8$$

Solución:

Tenemos que resolver el problema :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8$$

con las condiciones de contorno:

u(1,t) = u(-1,t) = 0

u(x,0)= 0

Para resolver este problema tenemos que buscar un campo auxiliar de temperaturas u_E , dado que la ecuación diferencial no es homogénea y estacionaria. Este campo auxiliar viene dado, según la teoría del libro, por la expresión:

$$v(x,t) = u(x,t) – u_E(x)$$

Donde $u_E(x)$ es la solución estacionaria del problema :

$$0 = 4\frac{\partial^2 u_E}{\partial x^2} + 8$$

con las condiciones de contorno:

$$u_E(-1) = u_E(1) = 0$$

La solución de la parte estacionaria es:

$$0 = 4\frac{\partial^2 u_E}{\partial x^2} + 8 \Leftrightarrow \partial^2 u_E = -2\partial x^2 \Leftrightarrow u_E = -x^2 + cte$$

La constante viene determinada por las condiciones de contorno, de tal forma que la solución es:

$$u_E = 1 - x^2$$

Así pues, el campo auxiliar queda como, $v(x,t) = u(x,t) - u_E(x)$, cuya ecuación diferencial a resolver es de la forma:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

con las condiciones de contorno; $v(-1,t)=v(1,t) = 0$, y la condición inicial:

$$v(x,0) = u(x,0) - u_E(x) = x^2 - 1$$

Ahora resolvemos esta ecuación:

Por separación de variables:

$$v(x,t) = X(x) * \Phi(t)$$

$$\frac{4}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} = -k^2$$

Elegimos la constante negativa para reproducir las condiciones de contorno en los extremos, al ser estos iguales a cero.
De tal forma que nos queda:

$$\frac{\partial \phi}{\phi} = -k^2 \partial t \Leftrightarrow Ln\phi = -k^2 t \Leftrightarrow \phi(t) = e^{-k^2 t}$$

$$\frac{4}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2 \Leftrightarrow X(x) = Asen(\frac{kx}{2}) + B\cos(\frac{kx}{2})$$

Utilizando las condiciones de contorno, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} v(-1,t) = 0 \Rightarrow Asen(-\frac{k}{2}) + B\cos(-\frac{k}{2}) = 0 \\ \\ v(1,t) = 0 \Rightarrow Asen(\frac{k}{2}) + B\cos(\frac{k}{2}) = 0 \end{array}\right\}$$

Sabemos que para ángulos opuestos se cumple que:

$$sen(a) = -sen(-a)$$

$$\cos(a) = \cos(-a)$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones tiene como soluciones :

A = 0 k = (2n + 1) π

Aplicando la condición inicial, obtenemos el valor de Bn como:

$$v(x,t) = \sum_0^\infty Bn * \cos(\frac{(2n+1)\pi}{2}x)e^{-k^2 t} \Rightarrow$$

$$v(x,0) = \sum_0^\infty Bn * \cos(\frac{(2n+1)\pi}{2}x) = x^2 - 1$$

Aplicamos la condición de ortogonalidad para el coseno:

$$\int_{-1}^{1} \cos(\frac{(2n+1)\pi}{2}x) * \cos(\frac{(2m+1)\pi}{2}x)dx = \delta_{nm}$$

$$Bm = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\cos(\frac{(2m+1)\pi}{2}x)dx$$

Por lo tanto la solución del problema general es:

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\cos(\frac{(2m+1)\pi}{2}x)dx = -\frac{16}{\pi^2(2m+1)^2}(\mathrm{s}en(m\pi) + \frac{2\cos(m\pi)}{\pi(2m+1)})$$

Podemos calcular la integral utilizando programas de análisis numérico, en nuestro caso Derive 5:

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\cos(\frac{(2m+1)\pi}{2}x)dx = -\frac{16}{\pi^2(2m+1)^2}(\mathrm{s}en(m\pi) + \frac{2\cos(m\pi)}{\pi(2m+1)})$$

Haciendo:

$$v(x,t) = u(x,t) - u_E(x) \rightarrow u(x,t) = v(x,t) + u_E(x)$$

$$\boxed{u(x,t) = 1 - x^2 - \sum_0^\infty \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right)e^{-k^2 t} * \frac{16}{\pi^2(2m+1)^2}\left(sen(m\pi) + \frac{2\cos(m\pi)}{\pi(2m+1)}\right)}$$

ALMUDENA SÁNCHEZ RODRÍGUEZ
JESÚS CINTAS LEAL