Daniel Díaz Simón
Borja Valcárcel Gómez

PROBLEMAS DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

6. **Resolver mediante separación de variables la ecuación de ondas**

$$\partial_x^2 u + u = \partial_t^2 u \qquad 0\leq x \leq 1, \qquad t > 0,$$

$$C.C \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases}$$

C.I: u(x, 0)= sen 4πx y **∂_tu(x, 0)=0**

METODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Debemos de poner la solución de la ecuación en derivadas parciales de forma que dependa de solo dos variables:

u(x,t)=X(x)ϕ(t)

A continuación escribimos la ecuación de una onda y sustituimos con las variables anteriores:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{\phi(t)}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - 1 = \frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

Para que la ecuación anterior sea válida para todo valor de x y de t ambos miembros deben ser iguales a una constante que será $-\lambda^2$:

$$\frac{1}{\phi(t)}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - 1 = \frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda^2$$

Las funciones X(x) y Φ(t) que forman las soluciones fundamentales han de verificar estas dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda^2$$

$$\frac{1}{\phi(t)}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - 1 = -\lambda^2$$

Buscamos la solución para la primera ecuación que será:

$X(x)= A_n \sin \lambda x + B_n \cos \lambda x$

A esta solución debemos aplicarle las condiciones de contorno dadas en el enunciado:

$u(0,t)=0 \Longrightarrow X(0)=0 \Longrightarrow B=0$

$u(1,t)=0 \Longrightarrow X(1)=0 \Longrightarrow A \text{ sen } \lambda=0$

$\text{sen } \lambda=0 \Longrightarrow \lambda_n= n\pi$

Repetimos el mismo proceso para la variable $\Phi(t)$:

$\Phi(t) =C_n \text{ sen } \omega_n t + D_n \cos \omega_n t$

Escribimos la solución u(x,t):

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C'_n sen\ \omega_n\ t + D'_n cos\ \omega_n t) sen\ n\pi x$

Debemos hallar los valores de las nuevas constantes C'_n y D'_n y para ello usaremos las condiciones de contorno:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.(\omega_n C'_n \cos \omega_n t) sen\ n\pi x\right|_{t=0} = \omega_n C'_n sen\ n\pi x = 0$$

$C'_n= 0$

$U(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} D'_n sen\ n\pi x = sen 4\pi x$ Si $\begin{cases} n = 4 \ \ D'_n = 1 \\ n \neq 4 \ D'_n = 0 \end{cases}$

Por último debemos tener en cuenta que $\omega_4=\sqrt{16\pi^2-1}sen(4\pi x)$, así el resultado final será:

u(x,t)= cos (t $\boldsymbol{\sqrt{16\pi^2-1}}$)$\boldsymbol{sen(4\pi x)}$