Ángel H.
Fernando G.
Amalia T.

Grupo 2

Problema 7. Tema 3

Resolver el siguiente problema acerca de la distribución estacionaria de temperaturas en un sólido seminfinito:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0, \qquad y>0, \qquad -\infty<x<\infty,$$

$$u(x,0)=\begin{cases} u_0=cte, & |x|<a, \\ 0, & |x|>a, \end{cases}$$

$$\lim_{y\to\infty} u(x,y)<\infty$$

Que el intervalo vaya de $-\infty$ a ∞ nos sugiere aplicar la transformada de Fourier sobre la variable x:

$$F\left[u(x,y)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-i\xi x}u(x,y)$$

Calculamos la transformada de Fourier a la ecuación dada

$$F\left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right)=0$$

para los límite proporcionados en el enunciado,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-i\xi x}\,\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-i\xi x}\,\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-i\xi x}\,\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-i\xi x}u(x,y)=0$$

Si hacemos $F\left[u(\xi,y)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-i\xi x}u(x,y)$ y teniendo en cuenta que $F\left[f^{'}(x)\right](\xi)=-i\xi f(\xi)$ y $F\left[f^{''}(x)\right](\xi)=-\xi^2 f(\xi)$. La ecuación anterior, nos queda:

$$-\xi^2 F(\xi,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F(\xi,y)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; -\xi^2 F(\xi,y)+\frac{\partial^2 F(\xi,y)}{\partial y^2}=0$$

Ecuación cuyas soluciones son $\lambda^2-\xi^2=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=|\xi| \\ \lambda_2=-|\xi| \end{cases}$ y cuya ecuación característica es:

$$F(\xi,y)=A(\xi)e^{|\xi|y}+B(\xi)e^{-|\xi|y}$$

Si le aplicamos las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} F(\xi,0)=\int_{-a}^{a} dx\; u_0 e^{-i\xi x} \\ F(\xi,0)=A(\xi)+B(\xi) \\ F(\xi,\infty)<\infty \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} F(\xi,0)=\frac{u_0}{i\xi}\left(e^{i\xi a}-e^{-i\xi a}\right) \\ A(\xi)=0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B(\xi)=\frac{u_0}{i\xi}\left(e^{i\xi a}-e^{-i\xi a}\right)=\frac{2u_0}{\xi}\, sen\xi a \\ A(\xi)=0 \end{cases}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación característica, nos queda:

$$F(\xi,y)=\frac{2u_0}{\xi}e^{-|\xi|y}sen\xi a$$

Para hallar la distribución de temperaturas, hay que aplicar la transformada inversa de Fourier:

$$F^{-1}\left(F\left(\xi,y\right)\right)=F^{-1}\left(\frac{2u_0}{\xi}e^{-|\xi|y}sen\xi a\right)=u\left(x,y\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\frac{2u_0}{\xi}e^{-|\xi|y}e^{i\xi x}sen\xi a=\frac{u_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\frac{sen\xi a}{\xi}e^{-|\xi|y}e^{i\xi x}=$$

$$=\frac{u_0}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\xi\frac{sen\xi a}{\xi}e^{-\xi y}\left(e^{-i\xi x}+e^{i\xi x}\right)=\frac{u_0}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\xi 2\cos\xi x\frac{sen\xi a}{\xi}e^{-\xi y}=$$

$$\frac{u_0}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\xi\left[sen\xi\left(a+x\right)+sen\xi\left(a-x\right)\right]\frac{e^{-\xi y}}{\xi}$$

entonces:

$$u(x,y)=\frac{u_0}{\pi}\left[arctg\frac{(a+x)}{y}+arctg\frac{(a-x)}{y}\right]$$