Leticia Jaén Tapia
Víctor Babiano Suárez

Tema3. Ejercicio9.

9. Halla la solución del siguiente problema de propagación de una onda a lo largo de una cuerda infinita:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} h, & |x| < \epsilon, \\ 0, & |x| > \epsilon, \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\,.$$

En primer lugar, modificamos la expresión para quedarla de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Hacemos la transformada de Fourier de la x:

$$\tilde{u}(\xi,t) = \Im\left[u(\xi,t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\xi x} u(\xi,t)$$

$$\Im\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial u}{\partial x} e^{-i\xi x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\xi\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\partial u}{\partial x} e^{-i\xi x} = \frac{\partial u}{\partial x} e^{-i\xi x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\xi\left[u e^{-i\xi x}\right]_{-\infty}^{+\infty} + (i\xi)^2\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\xi x} u(x,t)$$

Por tratarse de un sistema infinito suponemos que las condiciones en los extremos son:

$$u(x,t) \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad x \rightarrow \pm\infty$$
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad x \rightarrow \pm\infty$$

es decir, el sistema en el infinito no percibe las perturbaciones. Luego:

$$\Im\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = -\xi^2 \tilde{u}(\xi,t)$$

Por otro lado:

$$\Im\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Im\left[u(x,t)\right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{u}(\xi,t)$$

Teniendo en cuenta estas expresiones, la transformada de Fourier de la ecuación en derivadas parciales será:

$$\Im\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = c^2\Im\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$$

y viene dada por esta ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{u}(\xi,t) = -c^2\xi^2\tilde{u}(\xi,t)$$

Hallamos los autovalores sustituyendo $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{u}(\xi,t)$ por x^2:

$$x^2 + c^2\xi^2 = 0$$

$$x = \sqrt{-c^2\xi^2} = \pm c\xi\, i$$

Obtenemos la solución de la función transformada:

$$\tilde{u}(\xi,t) = A(\xi)\, sen(c\xi\, t) + B(\xi)\cos(c\xi\, t)$$

Aplicamos las condiciones de contorno en t=0:

$$\tilde{u}(\xi,0) = A(\xi)\, sen(c\xi\,(0)) + B(\xi)\cos(c\xi\,(0))$$

$$\tilde{u}(\xi,0) = B(\xi)$$

Hacemos la primera derivada de $\tilde{u}(\xi,t)$:

$$\widetilde{u'}(\xi,t) = A(\xi)(c\xi)\cos(c\xi\, t) - B(\xi)(c\xi)\, sen(c\xi\, t)$$

Aplicamos la segunda condición de contorno $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$:

$$\tilde{u}(\xi,0) = A(\xi)(c\xi)\cos(c\xi\,(0)) - B(\xi)(c\xi)\, sen(c\xi\,(0))$$

$$\widetilde{u}'(\xi,t) = A(\xi)\, c\xi = 0$$

Por tanto, $A(\xi) = 0$

Dadas las condiciones iniciales $u(x,0) = \begin{cases} h \to |x| < \varepsilon \\ 0 \to |x| > \varepsilon \end{cases}$ sabemos que $u(x,t)$ está definido en el intervalo desde -ξ hasta +ξ . Deducimos de esto que x dentro del intervalo mencionado será h y fuera de éste 0.

$$\tilde{u}(\xi,0) = \Im\left[u(x,0)\right] = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dx e^{-i\xi x} h$$

$$B(\xi) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dx e^{-i\xi x} h = -\frac{h}{i\xi}\left[e^{-i\xi x}\right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} = \frac{h}{\xi}\left(\frac{e^{i\xi x} - e^{-i\xi x}}{i}\right) = \frac{2h}{\xi} sen(\xi\varepsilon)$$

Una vez conocidos los valores de A y B hacemos la transformada inversa de Fourier, sabiendo que la solución en el espacio de Fourier es la siguiente:

$$\tilde{u}(\xi,t) = \frac{2h}{\xi} sen(\xi\varepsilon)\cos(c\xi t)$$

Aplicamos la transformada inversa:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \Im^{-1}\left[\tilde{u}(x,t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, e^{i\xi x}\tilde{u}(\xi,t) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, e^{i\xi x}\frac{2h}{\xi} sen(\xi\varepsilon)\cos(c\xi t) = \\ &= \frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, e^{i\xi x}\frac{1}{\xi} sen(\xi\varepsilon)\cos(c\xi t) \end{aligned}$$

Queremos expresa $e^{i\xi x}$ como una función trigonométrica.
Sabemos que

$$\cos(\xi x) = \frac{e^{i\xi x} + e^{-i\xi x}}{2}$$

Hacemos el $de - \xi\ a\ \xi$ cambio obteniendo:

$$\cos(\xi x) = \frac{e^{i\xi x} + e^{i\xi x}}{2} = e^{i\xi x}$$

Por simetría consideramos dos veces el semiintervalo de 0 a ∞, quedando:

$$u(x,t) = \frac{2h}{\pi}\int_0^{\infty} d\xi\, \frac{1}{\xi} sen(\xi\varepsilon)\cos(c\xi t)\cos(\xi x)$$

Aplicando la siguiente relación trigonométrica para resolverla:

$$\cos A \cos B \sin C = \frac{1}{4}[-\sin(A-B-C)-\sin(A+B-C)+\sin(A-B+C)+\sin(A+B+C)]$$

y haciendo los cambios oportunos:

$$u(x,t)=\frac{2h}{\pi}\frac{1}{4}\left[\begin{array}{l}\int_0^\infty d\xi\,\frac{-\sin(\xi x-ct\xi-\xi\varepsilon)}{\xi}-\int_0^\infty d\xi\,\frac{\sin(\xi x+ct\xi-\xi\varepsilon)}{\xi}\\+\int_0^\infty d\xi\,\frac{\sin(\xi x-ct\xi+\xi\varepsilon)}{\xi}+\int_0^\infty d\xi\,\frac{\sin(\xi x+ct\xi+\xi\varepsilon)}{\xi}\end{array}\right]$$

Finalmente, gracias a las tablas de integrales, obtenemos:

$$u(x,t)=\frac{h}{4}\left[\begin{array}{l}-f(\xi x-ct\xi-\xi\varepsilon)-f(\xi x+ct\xi-\xi\varepsilon)\\+f(\xi x-ct\xi+\xi\varepsilon)+f(\xi x+ct\xi+\xi\varepsilon)\end{array}\right]$$

siendo f(x) la función delta de Dirac.

donde $f(x)=\begin{cases}1 & si\ x>0\\ 0 & si\ x=0\\ -1 & si\ x<0\end{cases}$