Problemas de Métodos de la Física Matemática

Mª del Rocío Calero Fernández-Cortés
Leticia Jaén Tapia
Mª Jesús Jiménez Donaire

11. Halla mediante el metodo de la transformada de Laplace la solución del siguiente problema de difusión:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma^2 \left(u - u_1\right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad t > 0,$$

con condiciones de contorno

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0$$

y con condición inical $u(x,0) = u_0$.

Aplicamos la transformada de Laplace, como se nos pide, a ambos lados

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] - \mathcal{L}\left[\gamma^2 \left(u - u_1\right)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]$$

siendo

$$F'' \left(x,s\right) - \gamma^2 \left(F\left(x,s\right) - \frac{u_1}{s}\right) = sF\left(x,s\right) - u\left(x,0\right)$$

Reordenando los términos y tomando $F(x,s) = F$ por comodidad, obtenemos la siguiente expresión,

$$F'' - \left(\gamma^2 + s\right) F = -\frac{u_1}{s}\gamma^2 - u_0$$

Como podemos observar nos hallamos ante una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea. Primero procederemos a calcular la solución general de la ecuación homogénea.

$$D^2 - \left(\gamma^2 + s\right) = 0$$

$$D = \pm\sqrt{\left(\gamma^2 + s\right)}$$

$$F_H = Ae^{\left(\sqrt{\gamma^2+s}\right)x} + Be^{-\left(\sqrt{\gamma^2+s}\right)x}$$

Una vez obtenida, calculamos la solución particuar; para ello hacemos cero F" y despejamos F.

$$F_P = \frac{1}{\left(\gamma^2 + s\right)}\left(\frac{u_1}{s}\gamma^2 + u_0\right) = \frac{u_1\gamma^2 + u_0 s}{s\left(\gamma^2 + s\right)}$$

Por tanto, la solución completa es:

$$F = F_H + F_P$$

$$F = Ae^{\left(\sqrt{\gamma^2+s}\right)x} + Be^{-\left(\sqrt{\gamma^2+s}\right)x} + \frac{u_1\gamma^2 + u_0 s}{s\left(\gamma^2 + s\right)}$$

Para averiguar el valor de las contantes utilizamos las condiciones de frontera:

$$\frac{\partial F\left(x,s\right)}{\partial x} = Ake^{kx} - Bke^{-kx}$$

donde hemos hecho el cambio $k = \sqrt{\gamma^2 + s}$ por comodidad.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial F\left(x,s\right)}{\partial x}\right|_{x=0} \Rightarrow A = B$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \left.\frac{\partial F\left(x,s\right)}{\partial x}\right|_{x=1} \Rightarrow A(e^{kx} + e^{-kx}) = 0$$

Llegamos a dos conclusiones:

$$e^{kx} + e^{-kx} = 0 \Rightarrow e^{kx} = e^{-kx}$$

lo que es una incongruencia, o la solución trivial. Por tanto,

$$A = B = 0$$

De este modo, la solución completa de la ecuación diferencial no homogéna es

$$F = \frac{u_1\gamma^2 + u_0 s}{s\left(\gamma^2 + s\right)}$$

Sólo nos queda aplicar la transformada inversa de Laplace, que viene dada por,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{u_1\gamma^2 + u_0 s}{s\left(\gamma^2 + s\right)}\right]$$

Dividimos en fracciones simples la función resultante

$$F = \frac{u_1\gamma^2 + u_0 s}{s\left(\gamma^2 + s\right)} = \frac{u_1}{s} - \frac{u_1}{s + \gamma^2} + \frac{u_0}{s + \gamma^2}$$

y así, la distribución final de temperatura es:

$$u\left(x,t\right) = u_1 + \left(u_0 - u_1\right)e^{-\gamma^2 t}$$

Como conclusión, podemos observar que para tiempos largos la solución completa tiende a u_1, siendo ésta la temperatura final de equilibrio, y ademas vemos que satisface la ecuación diferencial inicial dada por el problema.