MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA (Hoja 3)

Ejercicio 4

Una barra de longitud *L* se encuentra térmicamente aislada sobre su superficie lateral y sus extremos se mantienen a temperatura cero. Si la temperatura inicial de la barra es constante, $u(x,0) = u_0$, se pide encontrar la distribución de temperaturas $u(x,t)$ en cualquier instante posterior mediante:

***a*) El método de separación de variables.**

***b*) El método de las transformadas integrales.**

a) Método de separación de variables

La ecuación en derivadas parciales que describe la evolución de este sistema físico es

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

con las siguientes condiciones de contorno homogéneas

$$u(x,t) = 0$$
$$u(L,t) = 0$$

y con la condición inicial

$$u(x,0) = u_0$$

utilizamos el método de separación de variables buscando soluciones de la forma

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

entonces tenemos

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{k\,T(t)}\frac{dT(t)}{dt}$$

vemos que hemos obtenido una ecuación en la que en cada miembro (a cada lado de la igualdad) hay una función que depende de una única variable. El único modo de que se satisfaga para cualquier valor de x y t es si cada miembro es igual a una constante

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{k\,T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = -\lambda^2$$

por tanto

$$\frac{1}{k\,T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = -\lambda^2$$
$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\lambda^2$$

la solución de la primera ecuación es

$$T(t) = T_0 e^{-\lambda^2 k t}$$

Vemos claramente aquí por qué hemos elegido una constante definida negativa, pues de lo contrario, conforme aumentase t, la temperatura tendería a infinito, lo cual no se ajustaría correctamente a nuestro problema.

Para la segunda ecuación que hemos obtenido tenemos en cuenta que debe ser satisfecha por $X(x)$ junto con las condiciones de contorno, lo cual no es otra cosa que un problema de Sturm-Liouville

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA (Hoja 3)

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

$$X(0) = 0 \rightarrow A = 0 \quad ; \quad X(L) = B\sin\lambda L = 0 \rightarrow \sin\lambda L = 0 \quad \rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}$$

$$X(x) = B\sin\frac{n\pi}{L}x$$

sustituyendo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_0 e^{-\lambda^2 k t} B_n \sin\frac{n\pi}{L}x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

haciendo uso de la condición inicial podemos calcular los coeficientes A_n, tenemos

$$u(x,0) = u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

entonces

$$\int_0^L u_0 \sin\frac{m\pi x}{L} dx = \int_0^L A_n \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi x}{L} = \frac{L}{2}\delta_{m,n} \quad A_n$$

despejamos A_n

$$A_n = \frac{2}{L} u_0 \int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2u_0}{n\pi}(1-\cos(n\pi))$$

$$par: \quad A_n = 0 \qquad ; \qquad impar: \quad A_n = \frac{4u_0}{n\pi}$$

sustituyendo llegamos a la solución

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4u_0}{(2n+1)\pi}\right) e^{-kt\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right)$$

b) Método de las transformadas integrales

Partimos de

$$k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

para denotar la transformada de Laplace sobre la variable t usaremos

$$\tilde{u}(x,s) = \mathscr{L}[u(x,t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x,t) dt$$

tomamos ahora transformada de Laplace con respecto a t en la ecuación en derivadas parciales

$$\mathscr{L}\frac{\partial u}{\partial t} = k\mathscr{L}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

tenemos

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 \tilde{u}(x,s)}{\partial x^2}$$

por otro lado

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \int_0^{\infty} e^{-st}\frac{\partial u}{\partial t} dt$$

que podemos evaluar mediante una integración por partes donde

$$dv = \frac{\partial u}{\partial t} dt \quad \rightarrow \quad v = u(x,t)$$

entonces

$$z = e^{-st} \quad \rightarrow \quad dz = -se^{-st} dt$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \left[u(x,t)e^{-st}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} su(x,t)e^{-st}\,dt = -u(x,0) + s\int_0^{\infty} u(x,t)e^{-st}\,dt = -u(x,0) + s\,\tilde{u}(x,s)$$

Con estos resultados vemos que la ecuación en derivadas parciales se reduce a una ecuación ordinaria en el espacio de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(x,s)}{\partial x^2} = \frac{s}{k}\tilde{u}(x,s) - \frac{1}{k}u(x,0) = \frac{s}{k}\tilde{u}(x,s) - \frac{1}{k}u_0$$

donde

$$\tilde{u}(x,s) = \frac{u_0}{s}\left[1 + Ae^{\sqrt{\frac{s}{k}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x}\right]$$

por las condiciones de contorno tenemos

$$\tilde{u}(0,s) = A + B + 1 \quad = \quad \tilde{u}(L,s) = 0$$

por tanto

$$A = \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}L - 1}}{e^{\sqrt{\frac{s}{k}}L} - e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}L}} \; \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}L}}{e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}L}} = \frac{e^{-2\sqrt{\frac{s}{k}}L} - e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}L}}{1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{k}}L}}$$

$$B = -1 - A = -1 - \frac{e^{-2\sqrt{\frac{s}{k}}L} - e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}L}}{1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{k}}L}}$$

sustituyendo

$$\tilde{u}(x,s) = \frac{u_0}{s}\left[1 + \frac{e^{-2\sqrt{\frac{s}{k}}L} - e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}L}}{1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{k}}L}} \; e^{\sqrt{\frac{s}{k}}x} - e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x} - \frac{e^{-2\sqrt{\frac{s}{k}}L} - \; e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}L}}{1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{k}}L}} e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x}\right]$$

$$\frac{e^{-2\sqrt{\frac{s}{k}}L} - e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}L}}{1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{k}}L}} e^{\sqrt{\frac{s}{k}}x} = e^{\sqrt{\frac{s}{k}}x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\mathrm{nL}\sqrt{\frac{s}{k}}} \left(e^{-2\sqrt{\frac{s}{k}}L} - e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}L}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}(-x + 2\mathrm{L} + 2\mathrm{nL})} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}(-x + 2\mathrm{nL} + L)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}(-x + 2\mathrm{L} + 2\mathrm{nL})} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}(-x + 2\mathrm{nL} + L)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}(-x + (2\mathrm{n} + 2)L)} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}(-x + (2\mathrm{n} + 1)L)}$$

calculamos ahora las transformadas inversas correspondientes

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{u_0}{s} \frac{e^{-2\sqrt{\frac{s}{k}}L} - e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}L}}{1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{k}}L}} \; e^{\sqrt{\frac{s}{k}}x}\right] = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} ferc\left(\frac{-x + (2\mathrm{n} + 2)L}{2\sqrt{t\,k}}\right) + u_0 \sum_{n=0}^{\infty} ferc\left(\frac{-x + (2\mathrm{n} + 1)L}{2\sqrt{t\,k}}\right)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{u_0}{s} e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x}\right] = u_0\, ferc\left[\frac{x}{2\sqrt{t\,k}}\right]$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{u_0}{s}\right] = u_0$$

la solución será

$$u(x,s) = u_0 - u_0\, ferc\left(\frac{x}{2\sqrt{t\,k}}\right)$$
$$+u_0 \sum_{n=0}^{\infty}\left[ferc\left(\frac{-x+(2\mathrm{n}+2)L}{2\sqrt{t\,k}}\right) - ferc\left(\frac{x+(2\mathrm{n}+2)L}{2\sqrt{t\,k}}\right) + ferc\left(\frac{-x+(2\mathrm{n}+1)L}{2\sqrt{t\,k}}\right) - ferc\left(\frac{x+(2\mathrm{n}+1)L}{2\sqrt{t\,k}}\right)\right]$$

Juan Manuel Izaguirre Arroyo
Jorge Lozano Cerrato
Javier Mellado Cano