Ángel H.

Fernando Gordillo

Carlos Picón

METODOS DE LA FÍSICA MATEMATICA

Hoja 3 problema nº6

Resolver mediante separación de variables la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad 0 \leq x \leq 1 \quad t > 0$$

Con las condiciones de contorno *u(0,t) = 0, u(1,t) = 0* y la condición inicial

$u(x,0) = sen(4\pi x)$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$

Resolvemos por el método de separación de variables:

Asumimos que la solución es de la forma:

u(x,t)=X(x)·T(t) (1)

Por lo tanto sustituimos en nuestra ecuación diferencial la variable u(x,t):

$$\frac{\partial^2 X(x)\cdot T(t)}{\partial x^2} + X(x)\cdot T(t) = \frac{\partial^2 X(x)\cdot T(t)}{\partial t^2}$$

Derivamos y obtenemos:

$$T(t)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)\cdot T(t) = X(x)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}$$

Separamos cada variable al lado en el que está situada su correspondiente derivada en la identidad:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{X(x)}{X(x)} = \frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \; ; \; \frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} - 1$$

Para validar la ecuación anterior igualamos ambos lados a una constante, que llamaremos por conveniencia $-\lambda^2$, por lo que:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} - 1 = -\lambda^2$$

Por lo que nos quedan dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\lambda^2; \qquad \frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} - 1 = -\lambda^2$$

<u>Resolvemos la primera ecuación diferencial:</u>

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\lambda^2$$

Las autofunciones de esta ecuación diferencial son:

$X(x) = K_n \operatorname{sen} \lambda x + P_n \cos \lambda x$

Donde K_n y P_n son constantes arbitrarias.

Si le aplicamos las condiciones de contorno:

$u(0,t) = 0$; $X(x) = K_n \operatorname{sen} 0 + P_n \cos 0 = 0$

Por lo que deducimos que $P = 0$

Aplicamos la segunda condición de contorno:

$u(1,t) = 0$; $K \operatorname{sen} \lambda = 0$ ***; por lo que podemos afirmar:***

$\lambda_n = n\pi$

Por lo que:

$X(x) = K_n \operatorname{sen}(n\pi x)$

<u>Resolvemos la segunda ecuación diferencial:</u>

$$\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} - 1 = -\lambda^2; \quad \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + (\lambda^2 - 1)T(t) = 0$$

Donde las autofunciones de la ecuación diferencial son:

$T(t) = \alpha_n \, sen \, \upsilon_n t + \beta_n \cos \upsilon_n t$

Teniendo en cuenta que:

$\upsilon_n = \sqrt{\lambda^2 - 1}$

Finalmente sustituimos las autofunciones de $T(t)$ y $X(x)$ en (1):

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \, sen \, \upsilon_n t + \beta_n \cos \upsilon_n t) \, sen \, n\pi x$

Nuestro último cometido es calcular las dos constantes α_n y β_n

<u>Para ello aplicamos las dos condiciones iniciales:</u>

$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = (\upsilon_n \alpha_n \cos \upsilon_n t + \upsilon_n \beta_n \, sen \, \upsilon_n t) sen \, n\pi x = 0$; si $t = 0$

$\upsilon_n \alpha_n \, sen \, n\pi x = 0$; Finalmente podemos concluir:

$\alpha_n = 0$

<u>Aplicamos la otra condición inicial:</u>

$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \, sen \, n\pi x = sen \, 4\pi x$

La única solución posible en la que se de esta igualdad es aquella en la que:

Para n=4 $\beta_n = 1$

Para n≠4 $\beta_n = 0$

Finalmente:

u(x,t) = $\boldsymbol{cos\ (\upsilon_n\ t)\ sen\ 4\pi x}$

Recordando que:

$\boldsymbol{\upsilon_n = \sqrt{\lambda^2 - 1}}$ **y que λ= nπ, pero como n=4**

λ= 4π; podemos concluir que:

$$\boxed{u(x,t) = cos\ t\ (\sqrt{16\pi^2 - 1})\ sen\ 4\pi x}$$