PROBLEMA DE MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA FÍSICA

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

ISMAEL GRANERO MARAÑA

CARLOS RODRIGUEZ FERNANDEZ

ISA ALFONSO

7 . Resolver el siguiente problema acerca de la distribución estacionaria de temperaturas en un sólido semiinfinito.

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0\,; \qquad y>0; \qquad -\infty<x<\infty$$

$$u(x,0) = \begin{cases} u^0 = cte, & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

$$\lim_{y\to\infty} u(x,y) < \infty$$

Usamos la transformada de Fourier porque $-\infty < x < \infty$. la expresión general de la transformada es:

$$F[u(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, u(x,y) e^{-ikx} \qquad (1)$$

Aplicando esta transformada a la función que se nos da obtenemos.

$$F\left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right) = 0\,;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$$

Además, sabemos que:

$$F[f'(x)](k) = -ikf(k)$$

$$F[f''(x)](k) = -k^2 f(k)$$

Para mayor comodidad, vamos a nombrar la ecuación (1) como F(k,y) pudiendo expresar la transformada que estamos realizando de la siguiente manera:

$$-k^2 F(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(k,y)$$

Calculando las soluciones para esta ecuación obtenemos.

$$\lambda^2 - k^2 = 0$$

Con lo cual,

$$\lambda_1 = |k|$$

$$\lambda_2 = -|k|$$

Permitiéndonos esto determinar la ecuación característica, que será del tipo.

$$F(k,y) = A(k)e^{|k|y} + B(k)e^{-|k|y} \qquad (2)$$

Una vez aquí, aplicamos las condiciones iniciales que nos proporciona el problema. Obteniendo.

$$A(k) + B(k) = F(k,0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}dx = \frac{u^0}{k}(e^{ika} - e^{-ika})$$

Observamos que

$$A(\xi) = 0$$

$$B(\xi) = \frac{u^0}{k}\left(e^{ika} - e^{-ika}\right) = \frac{2u_0\, sen(ka)}{k}$$

Sustituyendo pues en la ecuación (2).

$$F(k,y) = \frac{2u_0 e^{-|k|y}}{k} \cdot sen\ ka$$

Por último, aplicamos la transformada inversa de Laplace para llegar a calcular la distribución de temperaturas que se nos pide.

$$F^{-1}\,[\,F(k,y)] = u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \frac{2u^0 e^{-|k|y} e^{ikx}}{k} \cdot sen\ ka =$$

$$= \frac{u_0}{\pi}\int_0^{\infty} dk\,\frac{senka}{k}\cdot\ e^{-ky}\,(e^{-ikx} +\ e^{ikx})$$

llegando finalmente a la solución:

$$U(x,y) = \frac{u_0}{\pi}\int_0^{\infty} dk\ sen[\ k(a+x) +\ sen\ k(a-x)] \cdot \frac{e^{-ky}}{k}$$

Resolviendo la integral

$$u(x,y) = \frac{u^0}{\pi}(arctg\,\frac{(a+x)}{y} +\ arctg\ \frac{(a-x)}{y})$$