JESÚS MIGUEL SIMÓN MARTÍN

CARLOS MIGUEL ÁLVAREZ GONZALEZ

9.-Halla la solución del siguiente problema de propagación de una onda a lo largo de una cuerda infinita:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, -∞<x<∞, t>0.

$$u(x,0)=\begin{cases} h, & |x|<\epsilon \\ 0, & |x|>\epsilon \end{cases}$$

$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}$=0.

Modificamos la expresión, quedando:

$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

Puesto que se trata de un problema periódico y la variable x recorre (-∞;∞) , para la resolución de este problema tomamos la transformada de Fourier de la x:

ũ(ξ,t)=F$[u(\xi,t)]=\int_{-\infty}^{\infty}dx e^{-i\xi x}u(\xi,t)$

F$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\frac{\partial u}{\partial x}e^{-i\xi x}\Big]_{-\infty}^{\infty}+i\xi\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{\partial u}{\partial x}e^{-i\xi x}=\frac{\partial u}{\partial x}e^{-i\xi x}\Big]_{-\infty}^{\infty}+i\xi\left[ue^{-i\xi x}\right]_{-\infty}^{\infty}+$ $(i\xi)^2\int_{-\infty}^{\infty}dx e^{-i\xi x}$u(x,t)

Suponemos igual a cero la solución y su primera derivada cuando x tiende a ±∞.

Por tanto, tenemos:

F$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=-\xi^2$ ũ(ξ,t)

Hagamos la otra parte de la ecuación:

F$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]$=$\frac{\partial^2}{\partial t^2}F[u(x,t)]$=$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ũ(ξ,t)

La transformada de Fourier en nuestra ecuación será:

F$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = c^2$ F$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$;

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ũ(ξ,t)=-$c^2\ \xi^2$ ũ(ξ,t)

La solución de la transformada es:

ũ(ξ,t)=A(ξ)$\sin(c\xi t) + B(\xi)\cos(c\xi t)$

Ahora aplicamos las condiciones de contorno en t=0:

ũ(ξ,0)=A(ξ)$\sin\big(c\xi(0)\big) + B(\xi)\cos\big(c\xi(0)\big)$

ũ(ξ,0)= $B(\xi)$

Hacemos la primera derivada de ũ(ξ,t):

Ũ´(ξ,t)=A(ξ)(cξ)$\cos(c\xi t) - B(\xi)(c\xi)\sin(c\xi t)$

Aplicando la segunda condición de contorno:

Ũ´(ξ,0)=A(ξ)(cξ)$\cos(c\xi(0)) - B(\xi)(c\xi)\sin(c\xi(0))$

Ũ´(ξ,t)=A(ξ)cξ=0

Por tanto, A(ξ)=0

Dadas las C.I. sabemos que u(x,t) está definido en el intervalo desde –ϵ hasta +ϵ y tiene como valor h dentro del intervalo y cero fuera de este.

ũ(ξ,0)=F$[u(x,0)]$=$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx e^{-i\xi x}$h

B(ξ)= $\int_{-\xi}^{\xi} dx e^{-i\xi x}$h=-$\frac{h}{i\xi}\left[e^{-i\xi x}\right]_{-\epsilon}^{\epsilon}$=$\frac{h}{\xi}\left(\frac{e^{i\xi\epsilon}-e^{-i\xi\epsilon}}{i}\right)$=$\frac{2h}{\xi}\sin(\xi\epsilon)$

Por tanto tenemos que la solución en el espacio de Fourier es,

ũ(ξ,t)= $\frac{2h}{\xi}\sin(\xi\epsilon)\cos(c\xi t)$

Ahora tenemos que hacer es la transformada inversa para hallar la solución que nosotros queremos.

u(x,t)=$F^{-1}[\tilde{u}(x,t)]$=$\frac{1}{2\Pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i\xi x}$ũ(ξ,t)=

$\frac{1}{2\Pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{i\xi x}\,\frac{2h}{\xi}\sin(\xi\epsilon)\cos(c\xi t) = \frac{h}{\Pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i\xi x}\,\frac{1}{\xi}\sin(\xi\epsilon)\cos(c\xi t)$

Expresaremos $e^{i\xi x}$ como una función trigonométrica, valiéndonos de la expresión

$\cos(\xi x)$=$\frac{e^{i\xi x}-e^{-i\xi x}}{2}$

Si hacemos el cambio de –ξ a +ξ, entonces obtenemos $\cos(\xi x)$=$\frac{e^{i\xi x}-e^{i\xi x}}{2}$

=$\frac{2e^{i\xi x}}{2}$=$e^{i\xi x}$

Así obtenemos

u (x,t)= $\frac{2h}{\Pi}\int_{0}^{\infty} d\xi\,\frac{1}{\xi}\sin(\xi\epsilon)\cos(c\xi t)\cos(\xi x)$

Para resolver esta integral, usaremos esta relación:

$$\cos A\cos B\sin C = \\ = \frac{1}{4}[-\sin(A-B-C)-\sin(A+B-C)+\sin(A-B+C) + \sin(A+B+C)]$$

Operando tenemos que:

u(x,t)=

$$\frac{2h}{\Pi}\frac{1}{4}\left[\int_{0}^{\infty} d\xi\,\frac{-\sin(\xi x - ct\xi - \xi\epsilon)}{\xi} - \int_{0}^{\infty} d\xi\,\frac{\sin(\xi x + ct\xi - \xi\epsilon)}{\xi} + \int_{0}^{\infty} d\xi\,\frac{\sin(\xi x - ct\xi + \xi\epsilon)}{\xi} + \int_{0}^{\infty} d\xi\,\frac{\sin(\xi x + ct\xi + \xi\epsilon)}{\xi}\right]$$

Obtenemos, consultando tablas de integrales, la solución:

u(x,t)=$\frac{h}{4}\left[-f(\xi x - ct\xi - \xi\epsilon) - f(\xi x + ct\xi - \xi\epsilon) + f(\xi x - ct\xi + \xi\epsilon) + f(\xi x + ct\xi + \xi\epsilon)\right]$

Siendo f(x) la función delta de Dirac, donde

f(x)=$\begin{cases} 1 \; si \; x > 0 \\ 0 \; si \; x = 0 \\ -1 \; si \; x < 0 \end{cases}$