 PROBLEMAS DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

1. Sea $\{f_n(x)\}$, con $n = 0, 1, 2, \cdots$ una familia de funciones mutuamente ortogonales en el recorrido de 0 a ∞, con función peso e^{-x}. Halla la ecuación diferencial de la forma
$$x f_n''(x) + g(x) f_n'(x) + \lambda f_n(x) = 0$$
que satisface la función $f_n(x)$.

2. Sea la ecuación de Sturm-Liouville $p(x)y'' + p'(x)y' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0$ en el intervalo $[a, b]$ sujeta a las condiciones de contorno $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$ con $p(a) = p(b)$. Demuestra que si las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son definidas positivas, los autovalores λ del operador de Sturm-Liouville son positivos.

3. Halla los autovalores y las autofunciones del problema de Sturm-Liouville de ecuación
$$y'' + \lambda y = 0$$
definida en el intervalo $[a, b]$, y con condiciones de contorno $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$, $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$.

4. Halla los autovalores y las autofunciones del siguiente problema de Sturm-Liouville
$$y'' = -k^2 \left[1 + a\delta(x)\right] y, \quad a = \text{cte.}, \quad -L \leq x \leq L, \quad y(-L) = y(L) = 0\,.$$

5. *a)* Halla la ecuación transcendente que determina los autovalores λ_n y obtén las autofunciones $\psi_n(x)$ del problema de Sturm-Liouville definido por la ecuación diferencial $y''(x) = -\lambda_n y(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq a$ con las condiciones de contorno $y(0) + a y'(0) = 0$, $y(a) - a y'(a) = 0$.

   b) ¿Existe, en general, solución del problema inhomogéneo
$$y'' + (\pi/a)^2 y = f(x), \quad y(0) + a y'(0) = y(a) - a y'(a) = 0\ ?$$
   En caso afirmativo, halla la función de Green correspondiente.

6. Encuentra la función de Green en forma cerrada del problema de Sturm-Liouville singular
$$\begin{aligned} &x y'' + y' - \frac{4}{x} y = f(x), \quad x \geq 1, \\ &y(1) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = \text{finito}. \end{aligned}$$
Halla $y(x)$ si $f(x) = 1/x$.

7. Encuentra la función de Green del problema
$$\frac{d}{dx}\left[e^{-kx}\, y'(x)\right] = f(x), \quad 0 < k < 1, \quad 0 \leq x, \quad y(0) = 0, \quad y(\infty) = \text{finito}.$$
Halla $y(x)$ si $f(x) = e^{-x}$.

8. Encuentra la función de Green asociada al problema $y'' - k^2 y = f(x)$, $k > 0$, con las condiciones de contorno $y(\pm\infty) < \infty$.

9. Obtener en forma cerrada la función de Green para el problema inhomogéneo $y'' - k^2 y = f(x)$, $0 \leq x < \infty$, con las condiciones de contorno $y(0) = 0$, $y(\infty) < \infty$, si (a) $k \neq 0$, (b) $k = 0$. En ambos casos halla $y(x)$ si $f(x) = e^{-x}$.

10. Halla todas las soluciones posibles (autofunciones) $\psi_n(x)$ del problema de Sturm-Liouville
$$\begin{aligned} y'' + 2y' + \lambda y = 0, &\quad 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0, &\quad y'(1) = 0. \end{aligned}$$
Escribe explícitamente las tres primeras autofunciones de este problema.

11. Hallar la solución de la ecuación diferencial no homogénea
$$y'' + k^2 \left[1 + a\delta(x)\right] y = F_0, \quad a, F_0 = \text{ctes}, \quad -L \leq x \leq L,$$
sujeta a las condiciones de contorno $y(-L) = y(L) = 0$, expresándola como combinación lineal de funciones de un conjunto completo.

12. Sea el problema no homogéneo $y'' = f(x)$, $0 \le x \le L$, $y(0) = y'(L) = 0$.

    a) Encuentra las autofunciones normalizadas del operador d^2/dx^2 para las condiciones de contorno dadas.

    b) Escribe la función de Green $G(x, x')$ mediante desarrollo en serie.

    c) Obtén $G(x, x')$ en forma cerrada.

    d) Encontrar la solución del problema para el caso particular $f(x) = x^2$ con $L = 1$.

13. Sea el problema no homogéneo $y'' + y = \operatorname{sen} x$ con las condiciones de contorno $y(0) = y'(2\pi) = 0$. (a) Halla la función de Green mediante un desarrollo en serie de las autofunciones normalizadas correspondientes. (b) Obtén la función de Green en forma cerrada. (c) A partir de ella, resuelve el problema no homogéneo. (d) Halla la solución para las condiciones de contorno *no* homogéneas $y(0) = 2$, $y'(2\pi) = 0$.

14. Sea el problema no homogéneo

$$y'' - k^2 y = f(x), \quad 0 \le x \le L, \quad y(0) = y(L) = 0.$$

    Halla la función de Green (a) como un desarrollo en serie y (b) en forma cerrada. Comprueba la equivalencia de ambas expresiones.

15. *a*) Resuelve el problema de autovalores $y'' = -\lambda y$ con las condiciones de contorno $y(0) = y(\pi) + y'(\pi) = 0$.

    b) Encuentra la función de Green de $y'' = f(x)$ que satisface las condiciones de contorno anteriores mediante desarrollo en serie y también en forma cerrada.

16. (a) Halla en forma cerrada la función de Green correspondiente a la ecuación

$$y'' + \omega^2 y = f(x), \quad 0 \le x \le 2\pi, \quad \omega^2 > 0,$$

    con las condiciones de contorno $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$. ¿Para qué valores de $\omega > 0$ no existe solución del problema? (b) Demuestra que estos valores de ω son justamente los autovalores del problema homogéneo y halla las correspondientes autofunciones. ¿Cuál es su grado de degeneración?

17. Sea la ecuación de Sturm-Liouville no homogénea

$$y'' - m^2 y = f(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

    donde $m > 0$. Se pide hallar la función de Green correspondiente en forma de desarrollo en serie de autofunciones.

18. Sea la ecuación de Sturm-Liouville no homogénea

$$y'' - m^2 y = f(x), \quad 0 \le x, \quad y(1) = 0, \quad y(\infty) < \infty$$

    donde $m > 0$. Se pide hallar la función de Green correspondiente en forma cerrada.

19. El método de la función de Green puede aplicarse a ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales. Considérese un oscilador armónico amortiguado gobernado por la ecuación

$$x'' + 2\lambda x' + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m},$$

    donde $\lambda^2 < \omega_0^2$ y supóngase que la fuerza externa es cero para $t < 0$. (a) Desarrolla la función de Green y escribe la solución $x(t)$ que satisface las condiciones iniciales $x(0) = x'(0) = 0$. (b) ¿Cuál es la solución en el caso sobreamortiguado $(\lambda^2 > \omega_0^2)$?