EJERCICIO EN GRUPO DE LA HOJA 1 DE PROBLEMAS DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

REALIZADO POR: **Belén Caro Marroyo, Miguel García Diéguez y Amalia Toboso Castañera.**

11. Sea el problema no homogéneo $y''=f(x)$, $0 \leq x \leq L$, $y(0)=y'(L)=0$.
    a) Encuentra las autofunciones normalizadas del operador d^2/dx^2 para las condiciones de contorno dadas.
    b) Escribe la función de Green $G(x, \xi)$ mediante desarrollo en serie.
    c) Obtén $G(x, \xi)$ en forma cerrada.
    d) Encontrar la solución del problema para el caso particular $f(x)=x^2$ con $L=1$.

a) Para encontrar las autofunciones del operador d^2/dx^2 lo haremos a partir de la ecuación $d^2\varphi/dx^2 = -\lambda_n\varphi$ (1). Para ello distinguimos tres casos:

- Si $\lambda_n < 0 \rightarrow -\lambda_n > 0$, por lo que la solución de la ecuación (1) es una combinación de exponenciales:

$$\varphi_n(x) = A \exp(\sqrt{-\lambda}_n x) + B \exp(-\sqrt{-\lambda}_n x)$$

Aplicando la primera condición de contorno se obtiene:

$\varphi(0)=0 \rightarrow A+B=0 \rightarrow$ ***A= -B***

Si ahora aplicamos la segunda condición de contorno obtenemos que:

$\varphi'(L)=0$

$\varphi'(x)=A\sqrt{-\lambda}_n[\exp(\sqrt{-\lambda}_n x)] - B\sqrt{-\lambda}_n[\exp(-\sqrt{-\lambda}_n x)]$

$\varphi'(L)= A\sqrt{-\lambda}_n[\exp(\sqrt{-\lambda}_n L)] - B\sqrt{-\lambda}_n[\exp(-\sqrt{-\lambda}_n L)]=0$

$\varphi'(L)= A\sqrt{-\lambda}_n[\exp(\sqrt{-\lambda}_n x) + \exp(-\sqrt{-\lambda}_n x)]=0$

La única manera de que esta expresión sea 0 es que la constante **A=0** $\rightarrow$ **B=0**, lo que nos lleva a descartar $\varphi_n(x)$ como autofunción del operador de Sturm-Liouville.

- Si $\lambda_n=0$ entonces la forma de la solución de la ecuación (1) es la siguiente:

$$\varphi_n(x)=Ax+B$$

Aplicando la primera condición de contorno se obtiene:

$\varphi(0)=0 \rightarrow$ **B=0**

Si ahora aplicamos la segunda condición de contorno obtenemos que:

$\varphi'(L)=0$

$\varphi'(x)=A$

$\varphi'(L)=$**A=0**

La única manera de que la solución cumpla las condiciones de contorno es que las constantes A y B sean igual a 0, como en el caso anterior la solución trivial nos lleva a descartar $\varphi_n(x)$ como autofunción del operador de Sturm-Liouville.

- Si $\lambda_n>0 \rightarrow -\lambda_n<0$, lo que la solución de la ecuación (1) es una combinación de funciones trigonométricas:

$$\varphi_n(x)= A\cos\sqrt{\lambda}_n x + B\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}_n x$$

Aplicando la primera condición de contorno se obtiene:

$\varphi(0)=0 \rightarrow$ **A=0** $\rightarrow$ $\boldsymbol{\varphi_n(x) = B\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}_n x}$ **(2)**

Si ahora aplicamos la segunda condición de contorno obtenemos que:

$\varphi'(L)=0$

$\varphi'(x)=B\sqrt{\lambda}_n\cos\sqrt{\lambda}_n x$

$\varphi'(L)=B\sqrt{\lambda}_n\cos\sqrt{\lambda}_n L=0$

$\sqrt{\lambda}_n L= (2n+1)\Pi/2$

$$\boxed{\sqrt{\lambda}_n = \mathbf{(2n+1)}\Pi\mathbf{/2L}} \quad (3)$$

Expresión para los autovalores

Ahora encontremos el valor de B que lo haga constante de normalización de nuestra autofunción. Para ello partiremos de que una función está normalizada cuando su norma vale la unidad:

$$\|\varphi_n(x)\|^2 = 1 = \int_0^L dx\varphi_n(x)\ \varphi_n(x) = B^2\int_0^L dx sen^2\sqrt{\lambda_n}x = \frac{x}{2} - \frac{sen2\sqrt{\lambda_n}x}{4\sqrt{\lambda_n}}\ \Big|_0^L = 1$$

$$B^2\left[\frac{L}{2} - \frac{sen2\sqrt{\lambda_n}L}{4\sqrt{\lambda_n}}\right] = 1$$

$B = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{L}{2} - \dfrac{sen2\sqrt{\lambda_n}L}{4\sqrt{\lambda_n}}\right)}}$, si ahora sustituimos el valor de $\sqrt{\lambda}_n$ por (3) entonces

llegamos a que el valor de B es: $B=\sqrt{\dfrac{2}{L}}$.

La autofunción tiene por tanto la siguiente expresión:

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\ \mathbf{sen}\frac{(2n+1)\Pi}{2L}x}}$$

b) La función de Green G(x, ξ) se obtiene a partir del siguiente desarrollo en serie:

$$G(x,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\|\varphi_n(x)\|^2}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda - \lambda_n}$$

$$G(x,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\frac{2}{L}}sen\left[\frac{(2n+1)\Pi x}{2L}\right]\sqrt{\frac{2}{L}}\left[\frac{(2n+1)\Pi\xi}{2L}\right]}{0 - \frac{(2n+1)^2\Pi^2}{4L^2}}$$

$$\boxed{\mathbf{G(x,\xi)} = -\frac{8L}{\Pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sen\left[\frac{(2n+1)\Pi x}{2L}\right]sen\left[\frac{(2n+1)\Pi\xi}{2L}\right]}{(2n+1)^2}}$$

c) Para obtener G(x, ξ) en forma cerrada seguiremos el siguiente procedimiento:

Partimos de nuestra ecuación diferencial original y”=f(x). Si G(x,ζ) es solución de la ecuación entonces:

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x,\xi) = \delta(x-\xi)$$

Como solución de esta ecuación tendríamos lo siguiente:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} A(\xi)x + B(\xi), & 0 \le x \le \xi \\ C(\xi)x + D(\xi), & \xi \le x \le L \end{cases}$$

Apliquemos ahora la primera condición de equilibrio:

G(0, ξ)=0

B(ξ)=0

A continuación, tengamos en cuenta la segunda condición de equilibrio:

G’(L, ξ)=0

$$G'(x,\xi)=\begin{cases} A(\xi), & 0 \le x \le \xi \\ C(\xi), & \xi \le x \le L \end{cases}$$

G’(L, ξ)=**C(ξ)=0**

Tengamos ahora en cuenta que G(x, ξ) es continua en x= ξ:

D(ξ)=A(ξ) ξ

Por último, apliquemos la discontinuidad de salto finito de la derivada en x= ξ:

G’(ξ, ξ)=1/p(x), en nuestro caso p(x)=1

0-A(ξ)=1 → **A(ξ)= -1** → **D(ξ)= - ξ**

La forma cerrada de G(x, ξ) queda determinada así:

$$\boxed{\mathbf{G(x,\xi)}=\begin{cases} \mathbf{-x}, & \mathbf{0 \le x \le \xi} \\ \mathbf{-\xi}, & \mathbf{\xi \le x \le L} \end{cases}}$$

d) Para obtener la expresión de y(x) cuando f(x)=x^2 tenemos que realizar la siguiente operación:

$$y(x)=\int_0^L d\xi G(x,\xi)\,f(\xi)=\int_0^x d\xi(-\xi)\xi^2+\int_x^L d\xi(-x)\xi^2=-\left.\frac{\xi^4}{4}\right|_0^x-x\left(\left.\frac{\xi^3}{3}\right|_x^L\right)$$

$$y(x)=-\frac{x^4}{4}-x\frac{L^3}{3}+\frac{x^4}{3}$$

$$y(x)=\frac{x^4-4xL^3}{12}$$

En nuestro caso L=1 por lo que la forma definitiva que obtiene y(x) es:

$$\boxed{y(x)=\frac{x}{12}\left(x^3-4\right)}$$