JUAN FERNANDO BRAVO PAREDES
PEDRO JOSÉ MUÑOZ REYES
ÁNGEL HIERRO GARDETA

PROBLEMA 12.

Sea el problema no homogeneo y``(x) + y(x) = sen x con las condiciones de contorno y(0) = y`(2π)=0. a) Hallar la función de Green mediante un desarrollo en serie de las autofunciones normalizadas correspondientes. b) Obtener la función de Green en forma cerrada. c) A partir de ella, resolver el problema no homogéneo. d). Hallar la solución para las condiciones de contorno no homogéneas y(0) = 2, y(2π)=0.

a) Hallar la función de Green mediante un desarrollo en serie de las autofunciones normalizadas correspondientes.

Si comparamos la ecuación del problema con la de S-L inhomogeneo (L+μ)y(x)=f(x) tenemos que:

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = \operatorname{sen} x \\ \dfrac{d}{dx}\left(p(x)y'(x)\right) - s(x)y(x) + \mu r(x)y(x) = f(x) \end{cases}$$

f(x) = sen x, p(x) = 1, s(x) = 0, r(x) = 1, μ = 1 y las condiciones de contorno dadas en el problema son de tipo regular.

La ecuación homogénea asociada es:

$$y``(x) + \lambda\, y(x) = 0.$$

Cuyas raíces son: p $= \pm i\sqrt{\lambda}$

La solución a la ecuación diferencial homogénea es:

$$y(x) = Ae^{i\sqrt{\lambda}x} + Be^{-i\sqrt{\lambda}x} = C \cos\sqrt{\lambda}\, x + D \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\, x$$

Aplicando las condiciones de contorno (y(0) = y`(2π)=0).

Se obtiene que:

Para y(0): C=0.

Para y`(2π): $\sqrt{\lambda}\, D\cos\sqrt{\lambda}\, 2\pi = 0$.

Casos posibles:

*Si $\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,2\pi \neq 0$ => λ no es valor propio y se obtiene la solución trivial y(x) = 0.

*Si $\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,2\pi = 0$ =>λ es valor propio y se obtiene la solución

$$y(x) = D\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\,x$$

Luego los valores propios serán: $\cos\sqrt{\lambda}\,2\pi = 0 \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)^{1/2}$

Entonces las funciones propias toman la forma:

$$y_n(x) = D_n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$$

Obtenemos Dn normalizando las funciones propias:

$$\int_0^{2\pi} y_i(x) r(x) y_j(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \left|y_n(x)\right|^2 dx = 1 \Rightarrow D_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Luego: $$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$$

Con lo que la función de Green como desarrollo en serie de funciones propias será:

$$G(x,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n(x) y_m(\xi)}{\mu - \lambda_n} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi\right]$$

b) Obtener la función de Green en forma cerrada.

Para $\mu = 1$ la ecuación diferencial asociada al problema es:

$$y''(x)+y(x)=0$$

cuyas raíces son: m=$\pm i$

La ecuación diferencial homogénea asociada será:

$$y_h = Ae^{ix} + Be^{-ix}$$

$$= A(\cos x + i \operatorname{sen} x) + B(\cos x - i \operatorname{sen} x) = C \cos x + D\operatorname{sen} x$$

De modo que la función de Green será:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} C_1(\xi)\cos x + D_1(\xi)\,\text{sen}\,x, & 0 \le x < \xi \\ C_2(\xi)\cos x + D_2(\xi)\,\text{sen}\,x, & \xi < x \le 2\pi \end{cases}$$

Aplicando las condiciones de contorno, se obtiene:

$$\begin{cases} C_1(\xi) = 0, & 0 \le x < \xi \\ D_2(\xi) = 0, & \xi < x \le 2\pi \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en la función de Green:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} D_1(\xi)\,\text{sen}\,x, & 0 \le x < \xi \\ C_2(\xi)\cos x, & \xi < x \le 2\pi \end{cases}$$

Aplicando las condiciones de continuidad y de salto en la derivada:

$$\begin{cases} G(\xi^-,\xi) - G(\xi^+,\xi) = 0 \\ \left[\dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right]_{x>\xi} - \left[\dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right]_{x<\xi} = \dfrac{1}{p(\xi)} \end{cases}$$

se obtiene:

$$\begin{cases} D_1(\xi) = -\cos\xi \\ C_2(\xi) = -\text{sen}\,\xi \end{cases}$$

Por lo tanto la función de Green tendrá la forma:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} -\cos\xi\,\text{sen}\,x, & 0 \le x < \xi \\ -\text{sen}\,\xi\cos x, & \xi < x \le 2\pi \end{cases}$$

c) A partir de ella, resolver el problema no homogéneo.

La solución será de la forma:

$$y(x) = \int_0^{2\pi} G(x,\xi) f(\xi)d\xi = \int_0^{x} -\cos\xi\,\text{sen}\,x\,sen\xi\,d\xi + \int_0^{2\pi} -sen^2\xi\cos x\,d\xi =$$
$$= \tfrac{1}{2}(\text{sen}\,x - x\cos x)$$

d) Hallar la solución para las condiciones de contorno no homogéneas $y(0) = 2$, $y'(2\pi)=0$.

Aplicando estas condiciones de contorno en la ecuación homogénea obtenida en el apartado b): $y_h = C\cos x + D\,\text{sen}\,x$, se obtiene: C=2 y D=0

Luego: $\tilde{y}(x) = 2\cos x$

Por tanto, la solución del problema de Sturm-Liouville es:

$$y(x) = \int_0^{2\pi} \mathrm{G}(\mathrm{x},\xi)\mathrm{f}(\xi)\mathrm{d}\xi + \tilde{\mathrm{y}}(\mathrm{x}) = \int_0^x -\cos\xi senx \cdot sen\xi d\xi + \int_x^{2\pi} -sen^2\xi \cos x d\xi + 2\cos x =$$

$$= \tfrac{1}{2} senx - \left(\tfrac{1}{2}x + 2\right)\cos x$$

Que es solución de:

$$\begin{cases} \mathrm{y}'' + \mathrm{y} = \mathrm{senx} \\ \mathrm{y}(0)=2,\ \mathrm{y}'(2\pi)=0 \end{cases}$$