Problema realizado por:

Víctor Manuel Sánchez Carrasco

Alejandro Jesús Pérez Aparicio

Víctor Manuel Piris Carnerero

Problema 13

Sea el problema no homogéneo

$$y'' - k^2 y = f(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \;\; y(0) = y(L) = 0$$

Halla la función de Green (a) como un desarrollo en serie y (b) en forma cerrada. Comprueba la equivalencia de ambas expresiones.

a)

La ecuación de autovalores es $y'' + \lambda y = 0$. La forma genérica de la ecuación de Sturm-Liouville es

$$p(x)y'' + p'(x)y' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0$$

Comparando ambas ecuaciones obtenemos que $p(x) = 1, q(x) = 0, r(x) = 1$

$$(D^2 + \lambda)y = 0;\; D^2 + \lambda = 0;\; D^2 = -\lambda; D = \pm i\sqrt{\lambda}$$

Luego la solución será de la forma $y(x) = Ae^{i\sqrt{\lambda}x} + Be^{-i\sqrt{\lambda}x}$

Sabemos que

$$\cos ax = \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2};\, 2\cos ax = e^{iax} + e^{-iax}$$

$$sen\, ax = \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i};\, 2i\, sen\, ax = e^{iax} - e^{-iax}$$

Si sumamos ambas expresiones

$$2\cos ax + 2i\, sen\;\, ax = e^{iax} + e^{-iax} + e^{iax} - e^{-iax} = 2e^{iax}$$

$$e^{iax} = \cos ax + iax$$

Y si restamos

$$2\cos ax - 2i\, sen\;\, ax = e^{iax} + e^{-iax} - e^{iax} - e^{-iax} = 2e^{-iax}$$

$$e^{-iax} = \cos ax - i\, sen\, ax$$

De modo que si sustituimos $a = \sqrt{\lambda}$ y los respectivos valores de e^{iax} y e^{-iax}

En la ecuación $y(x) = Ae^{i\sqrt{\lambda}x} + Be^{-i\sqrt{\lambda}x}$

$$y(x) = A(\cos\sqrt{\lambda}x + i\,sen\,\sqrt{\lambda}x) + B(\cos\sqrt{\lambda}x - i\,sen\,\sqrt{\lambda}x)$$

$$y(x) = (A + B)\cos\sqrt{\lambda}x + i(A - B)\,sen\,\sqrt{\lambda}x$$

Y llamar A'=(A+B) y B'=i(A-B) de modo que nos queda

$$y(x) = A'\cos\sqrt{\lambda}x + B'\,sen\,\sqrt{\lambda}x$$

Ahora si aplicamos las condiciones de contorno

$$y(0) = A'\cos\sqrt{\lambda}0 + B'\,sen\,\sqrt{\lambda}0 = 0$$

Sabemos que $sen\,0 = 0$ y $\cos 0 = 1 \Longrightarrow A' = 0$

$$y(x) = B'\,sen\,\sqrt{\lambda}x$$

Por otro lado $y(L) = B'\,sen\,\sqrt{\lambda}L = 0$

Si $B' = 0$ tendríamos la solución trivial

Si $sen\,\sqrt{\lambda}L = 0 \Longrightarrow \sqrt{\lambda}L = n\pi$

Concluimos que sólo cuando los autovalores del problema de Sturm-Liouville $y'' + \lambda y = 0$ con las condiciones de contorno $y(0) = y(L) = 0$ son

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad n = 1,2,3, \dots$$

Existe la siguiente solución

$$\psi_n(x) = B'\,sen\,\frac{n\pi}{L}x$$

Por simplicidad podemos tomar el valor de la constante $B' = 1$ ya que sea cual sea el valor de esta las autofunciones siempre serán las mismas

$$\psi_n(x) = sen\,\frac{n\pi}{L}x$$

Utilizando la formula

$$G(x,\xi) = \sum_n \frac{1}{\|\psi_n\|^2}\frac{\psi_n(x)\psi_n^*(\xi)}{\mu - \lambda_n}$$

Que nos permite representar la función de Green en series de autofunciones de las autofunciones

$$\psi_n(x) = sen\frac{n\pi}{L}x$$

Su norma es $\|\psi_n\|^2 = \langle\psi_n|\psi_n\rangle = \int_0^L dxr(x)\psi_n(x)\psi_n^*(x)$

$$\|\psi_n\|^2 = \int_0^L dxsen\frac{n\pi}{L}x\, sen\frac{n\pi}{L}x = \frac{L}{2} - \frac{sen\, 2\frac{n\pi}{L}L}{4\frac{n\pi}{L}} = \frac{L}{2}$$

Nótese que $\mu = -k^2$ y sustituyendo obtenemos

$$G(x,\xi) = \sum_n \frac{1}{\frac{L}{2}} \frac{sen\frac{n\pi}{L}x}{-k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} sen\frac{n\pi}{L}\xi$$

$$G(x,\xi) = -\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\frac{n\pi}{L}x}{k^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} sen\frac{n\pi}{L}\xi$$

b)

Sea la ecuación diferencial de Sturm-Liouville no homogénea

$$y'' - k^2 y = f(x)$$

con condiciones de contorno

$$y(0) = y(L) = 0$$

La forma genérica de la ecuación de Sturm-Liouville es

$$p(x)y'' + p'(x)y' + [q(x) + \mu r(x)]y = 0$$

Comparando ambas ecuaciones obtenemos que $p(x) = 1, q(x) = 0, r(x) = 1$ y

$\mu = -k^2$.

$$(D^2 - k^2)y = 0;\ D^2 - k^2 = 0;\ D^2 = -k^2; D = \pm k$$

Luego la solución será de la forma $y(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$

Aplicando la primera condición de contorno

$$y(0)_1 = Ae^{k0} + Be^{-k0} = 0 \Longrightarrow A + B = 0 \Longrightarrow B = -A$$

$$y(x)_1 = Ae^{kx} - Ae^{-kx}$$

Aplicando la segunda condición de contorno

$$y(L)_2 = Ae^{kL} + Be^{-kL} = 0 \Longrightarrow B = -Ae^{2kL}$$

$$y(x)_2 = Ae^{kx} - Ae^{2kL}e^{-kx}$$

Sabemos que la función de Green es

$$G(x,\xi) = \begin{cases} G(x,\xi)_1 = C(\xi)_1 y(x)_1 & 0 \le x < \xi \\ G(x,\xi)_2 = C(\xi)_2 y(x)_2 & \xi < x \le L \end{cases}$$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} A(\xi)_1 e^{kx} - A(\xi)_1 e^{-kx} & 0 \le x < \xi \\ A(\xi)_2 e^{kx} - A(\xi)_2 e^{2kL} e^{-kx} & \xi < x \le L \end{cases}$$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} A(\xi)_1 [e^{kx} - e^{-kx}] & 0 \le x < \xi \\ A(\xi)_2 e^{kL} [e^{kx} e^{-kL} - e^{kL} e^{-kx}] & \xi < x \le L \end{cases}$$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} A(\xi)_1 [e^{kx} - e^{-kx}] & 0 \le x < \xi \\ A(\xi)_2 e^{kL} \left[e^{k(x-L)} - e^{-k(x-L)}\right] & \xi < x \le L \end{cases}$$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} A(\xi)_1 senh\, kx & 0 \le x < \xi \\ A(\xi)_2 e^{kL} senh\, k(x-L) & \xi < x \le L \end{cases}$$

Ahora con la condición de continuidad de $G(x,\xi)$ en ξ

$$G(\xi,\xi)_1 - G(\xi,\xi)_2 = 0$$

Y con la condición de discontinuidad $G(x,\xi)$ en ξ

$$\frac{d}{dx}G(x,\xi)_2 - \frac{d}{dx}G(x,\xi)_1 = \frac{1}{P(\xi)}$$

Nos permitirán calcular $A(\xi)_1 \; y \; A(\xi)_2$

$$A(\xi)_1 senh\, k\xi - A(\xi)_2 e^{kL} senh\, k(\xi - L) = 0$$

$$A(\xi)_2 e^{kL} cosh\, k(\xi - L) - A(\xi)_1 cosh\, k\xi = \frac{1}{k}$$

$$A(\xi)_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -e^{kL} senh\, k(\xi - L) \\ \frac{1}{k} & e^{kL} cosh\, k\xi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} senh\, k\xi & -e^{kL} senh\, k(\xi - L) \\ -cosh\, k\xi & e^{kL} cosh\, k(\xi - L) \end{vmatrix}}$$

El determinante del denominador es

$$\begin{vmatrix} senh\, k\xi & -e^{kL} senh\, k(\xi - L) \\ -cosh\, k\xi & e^{kL} cosh\, k(\xi - L) \end{vmatrix} \\ = e^{kL}[senh\, k\xi cosh\, k(\xi - L) - cosh\, k\xi senh\, k(\xi - L)]$$

Basándonos en la siguiente relación trigonométrica

$$senh\,(A \pm B) = senh\, A cosh\, B \pm cosh\, A senh\, B$$

El determinante es igual a

$$\begin{vmatrix} senh\, k\xi & -e^{kL} senh\, k(\xi - L) \\ -cosh\, k\xi & e^{kL} cosh\, k(\xi - L) \end{vmatrix} = e^{kL} senh\,[k\xi - k(\xi - L)] = e^{kL} senh\, kL$$

$$A(\xi)_1 = \frac{senh\, k(\xi - L)}{k senh\, kL}$$

$$A(\xi)_2 = \frac{\begin{vmatrix} senh\, k\xi & 0 \\ -cosh\, k\xi & \frac{1}{k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} senh\, k\xi & -e^{kL} senh\, k(\xi - L) \\ -cosh\, k\xi & e^{kL} cosh\, k(\xi - L) \end{vmatrix}}$$

$$A(\xi)_2 = \frac{senh\, k\xi}{e^{kL} k senh\, kL}$$

por lo que la función de Green es

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{senh\, k(\xi - L)}{k senh\, kL} senh\, kx & 0 \le x < \xi \\ \dfrac{senh\, k(x - L)}{k senh\, kL} senh\, k\xi & \xi < x \le L \end{cases}$$

c)

Para comprobar la equivalencia entre ambas expresiones hemos hecho el desarrollo en serie de Fourier de la función de Green obtenida por construcción, que viene dedo por

$$G(x, \xi) = \sum_n C_n \psi_n(x)$$

con

$$C_n = \frac{\langle \psi_n(x) | G(x, \xi) \rangle}{\|\psi_n\|^2}$$

donde

$$\langle \psi_n(x) | G(x,\xi) \rangle = \int_0^L d\xi r(x) \psi_n^*(x)\, G(x,\xi)$$

La función peso de este problema es $r(x) = 1$ y $\psi_n^*(x) = sen\frac{n\pi}{L}x$ de modo que

$$\langle \psi_n | G(x,\xi) \rangle = \int_0^\xi dx\, sen\frac{n\pi}{L}x \frac{senh\, k(\xi - L)}{ksenh\, kL} senh\, kx + \int_\xi^L dx\, sen\frac{n\pi}{L}x \frac{senh\, k(x-L)}{ksenh\, kL} senh\, k\xi$$

$$= \frac{senh\, k(\xi - L)}{ksenh\, kL} \int_0^\xi dx\, sen\frac{n\pi}{L}x\, senh\, kx\; + \frac{senh\, k\xi}{ksenh\, kL} \int_\xi^L dx\, sen\frac{n\pi}{L}x\, senh\, k(x-L)$$

Sustituyendo en la integral $senh\, kx\; = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}$ y $senh\, kx\; = \frac{e^{k(x-L)} - e^{-k(x-L)}}{2}$

$$\langle \psi_n | G(x,\xi) \rangle = \frac{senh\, k(\xi - L)}{2ksenh\, kL} \left[\int_0^\xi dx\, e^{kx} sen\frac{n\pi}{L}x\; - \int_0^\xi dx\, e^{-kx} sen\frac{n\pi}{L}x \right] + \frac{senh\, k\xi}{2ksenh\, kL} \left[e^{-kL} \int_\xi^L dx\, e^{kx} sen\frac{n\pi}{L}x\; - e^{kL} \int_\xi^L dx\, e^{-kx} sen\frac{n\pi}{L}x \right]$$

De modo que las cuatro integrales que hay que resolver son del tipo

$$\int dx\, e^{ax} sen\, bx = \frac{e^{ax}(asen\, bx - bcos\, bx)}{a^2 + b^2}$$

Llamando $m_1 = \frac{senh\, k(\xi - L)}{2ksenh\, kL} \frac{1}{k^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$ y $m_2 = \frac{senh\, k\xi}{2ksenh\, kL} \frac{1}{k^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$

$$\langle \psi_n | G(x,\xi) \rangle = m_1 \left[e^{kx} \left(ksen\frac{n\pi}{L}x - \frac{n\pi}{L} cos\; \frac{n\pi}{L}x \right) + e^{-kx} \left(ksen\frac{n\pi}{L}x + \frac{n\pi}{L} cos\; \frac{n\pi}{L}x \right) \right]_0^\xi + m_2 \left[e^{-kL} e^{kx} \left(ksen\frac{n\pi}{L}x - \frac{n\pi}{L} cos\frac{n\pi}{L}x \right) + e^{kL} e^{-kx} \left(ksen\frac{n\pi}{L}x + \frac{n\pi}{L} cos\; \frac{n\pi}{L}x \right) \right]_\xi^L$$

Sacando factor común $ksen\frac{n\pi}{L}x$ y $\frac{n\pi}{L}cos\frac{n\pi}{L}x$

$$= m_1\left[\frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2}ksen\frac{n\pi}{L}x + \frac{-e^{kx}+e^{-kx}}{2}\frac{n\pi}{L}cos\frac{n\pi}{L}x\right]_0^{\xi} + m_2\left[\frac{e^{k(x-L)}+e^{-k(x-L)}}{2}ksen\frac{n\pi}{L}x + \frac{-e^{k(x-L)}+e^{-k(x-L)}}{2}\frac{n\pi}{L}cos\frac{n\pi}{L}x\right]_{\xi}^{L}$$

$$= \frac{1}{k^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}\left[\frac{senh\,k(\xi-L)}{ksenh\,kL}\left(kcosh\,k\xi\,sen\frac{n\pi}{L}\xi - \frac{n\pi}{L}senh\,k\xi\,cos\frac{n\pi}{L}\xi - 0\right) + \frac{senh\,k\xi}{ksenh\,kL}\left(0 - kcosh\,k(\xi-L)\,sen\frac{n\pi}{L}\xi - \frac{n\pi}{L}senh\,k(\xi-L)\,cos\frac{n\pi}{L}\xi\right)\right]$$

$$= \frac{1}{ksenh\,kL}\frac{1}{k^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}\left[(senh\,k(\xi-L)cosh\,k\xi - senh\,k\xi cosh\,k(\xi-L))k\,sen\frac{n\pi}{L}\xi + (-senh\,k(\xi-L)\,senh\,k\xi + senh\,k(\xi-L)\,senh\,k\xi)\frac{n\pi}{L}cos\frac{n\pi}{L}\xi\right]$$

Como se puede ver $-senh\,k(\xi-L)\,senh\,k\xi + senh\,k(\xi-L)\,senh\,k\xi = 0$

$$\langle\psi_n|G(x,\xi)\rangle = \frac{k}{ksenh\,kL}\frac{1}{k^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}\left[(senh\,k(\xi-L)cosh\,k\xi - senh\,k\xi cosh\,k(\xi-L))\,sen\frac{n\pi}{L}\xi\right]$$

Recordando de nuevo la relación trigonométrica

$$senh\,(A\pm B) = senh\,Acosh\,B \pm cosh\,Asenh\,B$$

$$\langle\psi_n|G(x,\xi)\rangle = -\frac{ksenh\,kL}{ksenh\,kL}\frac{sen\frac{n\pi}{L}\xi}{k^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} = -\frac{sen\frac{n\pi}{L}\xi}{k^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

A demás como ya calculamos antes

$$\|\psi_n\|^2 = \langle\psi_n|\psi_n\rangle = \int_0^L dxr(x)\psi_n(x)\psi_n^*(x)$$

$$\|\psi_n\|^2 = \int_0^L dxsen\frac{n\pi}{L}x\,sen\frac{n\pi}{L}x = \frac{L}{2} - \frac{sen\,2\frac{n\pi}{L}L}{4\frac{n\pi}{L}} = \frac{L}{2}$$

Y por tanto los coeficientes de Fourier son

$$C_n = \frac{\langle\psi_n|G(x,\xi)\rangle}{\|\psi_n\|^2} == -\frac{2}{L}\frac{sen\frac{n\pi}{L}\xi}{k^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

Que si recordamos como era la función de Green por el método de desarrollo en serie de autofunciones

$$G(x,\xi) = -\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen\frac{n\pi}{L}x}{k^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}sen\frac{n\pi}{L}\xi$$

Como los coeficientes coinciden podemos decir que la función de Green obtenida por construcción es equivalente a la obtenida por el método de desarrollo en serie de autofunciones.