MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Jesús Manuel Gómez Romero
Mónica Capilla Alba
José Antonio Paredes Moreno

HOJA 1: EJERCICIO 14

a) Resuelve el problema de autovalores $y'' = -\lambda y$ con las condiciones de contorno $y(0) = y(\pi) + y'(\pi) = 0$.
b) Encuentra la función de Green de $y'' = f(x)$ que satisface las condiciones de contorno anteriores mediante desarrollo en serie y también de forma cerrada.

a) Ecuación característica asociada: $r^2 + \lambda = 0$

$$\Rightarrow \quad r^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \pm\sqrt{-\lambda}}$$

Tenemos 3 casos posibles según el valor de λ que veremos a continuación:

$$\begin{cases} 1.- \quad \lambda = 0 \\ 2.- \quad \lambda < 0 \\ 3.- \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

1.- λ = 0

$$r = \pm\sqrt{0} \quad \Rightarrow \quad r = 0 \quad , \quad \textit{raíz doble}$$

Solución general: $y(x) = A + Bx$

Aplicando las condiciones de contorno:

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A + B \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 0}$$

Entonces:

$$y(x) = Bx$$
$$y'(x) = B$$

$$y(\pi) + y'(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad B\pi + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B(\pi + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 0}$$

Obtenemos:

$$A = B = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = 0$$

Es decir, llegamos a la SOLUCIÓN TRIVIAL para $\lambda = 0$.

2.- $\lambda < 0$

$$-\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm\sqrt{-\lambda} \quad , \quad 2 \textit{ raíces reales simples}$$

<u>Solución general:</u> $\qquad y(x) = A\cosh\sqrt{-\lambda}\,x + B\,senh\sqrt{-\lambda}\,x$

Aplicando las condiciones de contorno:

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A\cosh 0 + B\,senh\,0 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A\,\frac{e^0+e^0}{2} + B\,\frac{e^0-e^0}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad A\cdot 1 + B\cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 0}$$

Entonces:

$$y(x) = B\,senh\sqrt{-\lambda}\,x$$
$$y'(x) = B\sqrt{-\lambda}\,\cosh\sqrt{-\lambda}\,x$$

$$y(\pi) + y'(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad B\,senh\sqrt{-\lambda}\,\pi + B\sqrt{-\lambda}\,\cosh\sqrt{-\lambda}\,\pi = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad B\left[senh\sqrt{-\lambda}\,\pi + \sqrt{-\lambda}\,\cosh\sqrt{-\lambda}\,\pi\right] = 0$$

Llegamos a dos posibles resultados:

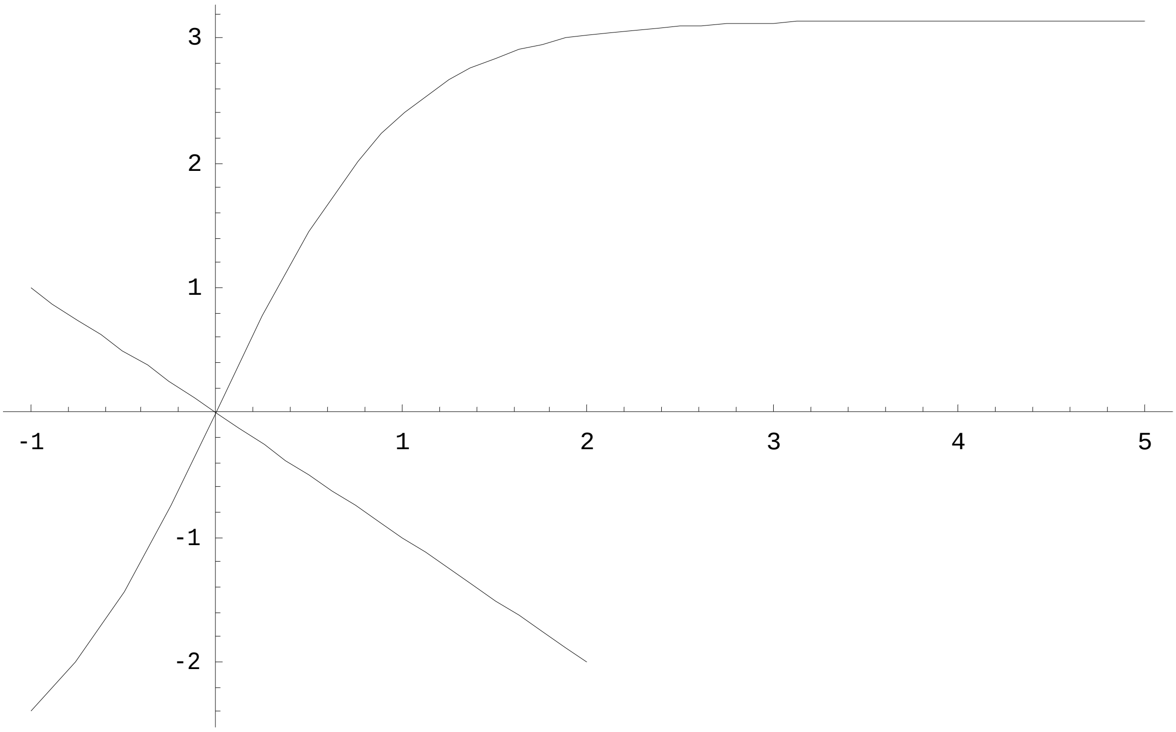
- $\boxed{B = 0} \quad \Rightarrow \quad A = B = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = 0 \quad \textit{SOLUCIÓN TRIVIAL}$

- $senh\sqrt{-\lambda}\,\pi + \sqrt{-\lambda}\,\cosh\sqrt{-\lambda}\,\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{senh\sqrt{-\lambda}\,\pi}{\cosh\sqrt{-\lambda}\,\pi} + \sqrt{-\lambda} = 0 \quad \Rightarrow$

  $\Rightarrow \quad tgh\sqrt{-\lambda}\,\pi = -\sqrt{-\lambda}$

Para el segundo caso obtenemos una ecuación trascendente que debemos representar para hallar los valores de λ que la cumplen:

$$tgh\sqrt{-\lambda}\,\pi = -\sqrt{-\lambda}$$



Vemos que el único punto de corte de la recta con la función tangente hiperbólica es el origen, es decir, el punto (0,0), de modo que la solución obtenida para este caso también es la SOLUCIÓN TRIVIAL.

3.- $\lambda > 0$

$-\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm\sqrt{-\lambda} \quad \Rightarrow \quad r = \pm i\sqrt{\lambda}$, *2 raíces complejas*

<u>Solución general:</u> $\qquad y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\,sen\sqrt{\lambda}\,x$

Aplicamos las condiciones de contorno:

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A\cos 0 + B\,sen\,0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A\cdot 1 + B\cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = 0}$$

Entonces:

$$y(x) = B\,sen\sqrt{\lambda}\,x$$
$$y'(x) = B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,x$$

$$y(\pi) + y'(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad B\,sen\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad B\left[sen\sqrt{\lambda}\,\pi \;+\; \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi \right] \;=\; 0$$

Llegamos a dos posibles resultados:

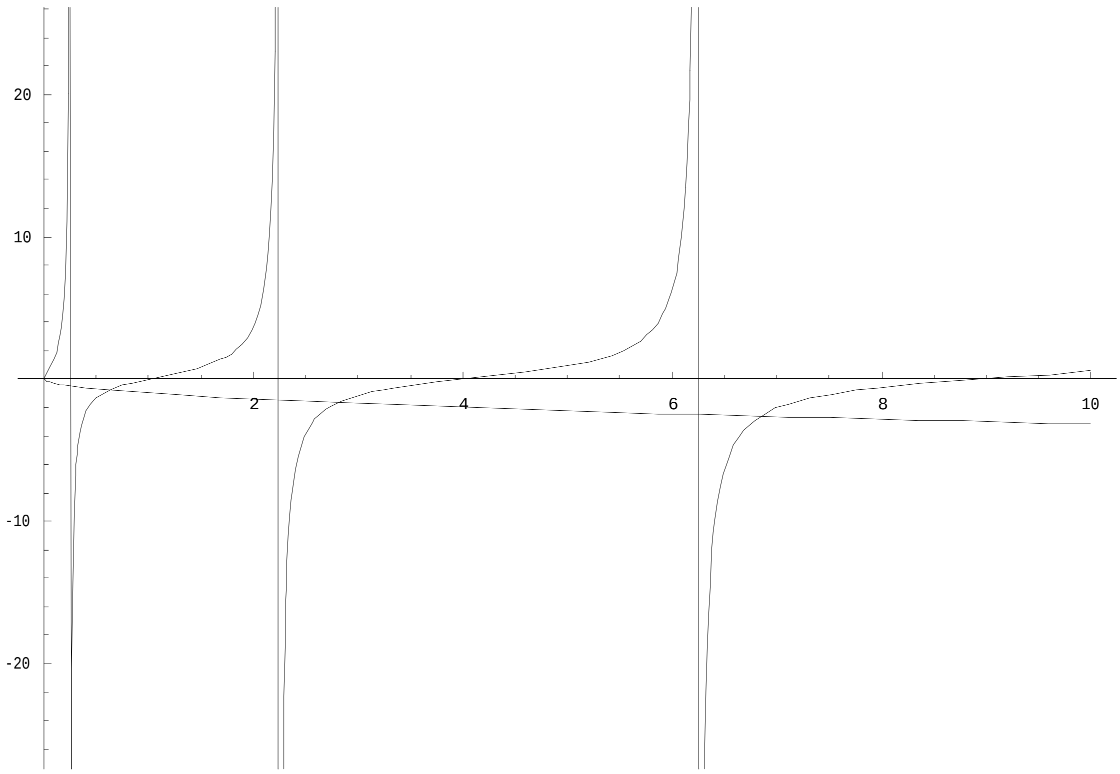
- $\boxed{B \;=\; 0} \qquad \Rightarrow \qquad A \;=\; B \;=\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad y(x) \;=\; 0 \qquad$ *SOLUCIÓN TRIVIAL*

- $sen\sqrt{\lambda}\,\pi \;+\; \sqrt{\lambda}\,\cos\sqrt{\lambda}\,\pi \;=\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{sen\sqrt{\lambda}\,\pi}{\cos\sqrt{\lambda}\,\pi} \;+\; \sqrt{\lambda} \;=\; 0 \qquad \Rightarrow$

  $\Rightarrow \qquad tg\,\sqrt{\lambda}\,\pi \;=\; -\sqrt{\lambda}$

Para el segundo caso obtenemos una ecuación trascendente que debemos representar para hallar los valores de λ que la cumplen:

$$tg\,\sqrt{\lambda}\,\pi \;=\; -\sqrt{\lambda}$$



Calculamos los puntos de corte con un programa de cálculo simbólico. Algunos de ellos son:

$$\lambda_1=0, \quad \lambda_2=0.620373, \quad \lambda_3=2.79427, \quad \lambda_4=6.84457, \ldots$$

Estos puntos de corte son los autovalores, λ_n, de donde podemos hallar las autofunciones:

$$\boxed{\psi_n = B \; sen\sqrt{\lambda_n}\; x}$$

b)

<u>MEDIANTE DESARROLLO EN SERIE:</u>

FUNCIÓN DE GREEN:

$$G(x,\xi) = \sum_i \frac{1}{\|\psi_n\|^2} \frac{\psi_n(x)\; \psi_n^*(x)}{\mu - \lambda_n}$$

$\rightarrow$ $\mu = 0$, por las condiciones que nos da el problema.

Donde $\psi_n(x)$ son las autofunciones y $\psi_n^*(\xi)$ es su conjugado en $x = \xi$, de modo que calculando la norma podremos construir la función de Green:

$$\|\psi_n\|^2 = \int_0^{\pi} dx\; r(x)\; \psi^*(x)\; \psi_n(x) = \int_0^{\pi} dx\; 1\; B^2\; sen^2\sqrt{\lambda_n}\; x = B^2\left[\frac{\pi}{2} - \frac{sen\sqrt{\lambda_n}\,\pi}{4\sqrt{\lambda_n}}\right]$$

Ahora sólo nos queda sustituir:

$$G(x,\xi) = \sum_i \frac{1}{B^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{sen\sqrt{\lambda_n}\pi}{4\sqrt{\lambda_n}}\right)} \frac{B^2 sen\sqrt{\lambda_n}\; x\; sen\sqrt{\lambda_n}\; \xi}{-\lambda_n}$$

$$= \frac{-1}{\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{2\pi} cos\sqrt{\lambda_n}\;\pi\right)} \sum_i \frac{B^2 sen\sqrt{\lambda_n}\; x\; sen\sqrt{\lambda_n}\; \xi}{-\lambda_n}$$

<u>DE FORMA CERRADA:</u>

<u>Solución general de la homogénea:</u>

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = A + B\,x$$
$$y'(x) = B$$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} A_1(\xi) + B_1(\xi)\, x & 0 \le x < \xi \\ \\ A_2(\xi) + B_2(\xi)\, x & \xi < x \le \pi \end{cases}$$

Aplicamos las condiciones dadas:

1.- $y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad G(0,\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1(\xi) + B_1(\xi)\cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_1(\xi) = 0}$

2.- $y(\pi) + y'(\pi) = 0 \Rightarrow G(\pi,\xi) + G'(\pi,\xi) = 0 \Rightarrow A_2(\xi) + B_2(\xi)\pi + B_2(\xi) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad A_2(\xi) + B_2(\xi)\,(\pi+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_2(\xi) = -B_2(\xi)\,(\pi+1)}$$

Sustituimos en la función de Green los valores obtenidos para $A_1(\xi)$ y $A_2(\xi)$:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} B_1(\xi)\, x & 0 \le x < \xi \\ \\ -B_2(\xi)\,(\pi+1) + B_2(\xi)\, x & \xi < x \le \pi \end{cases}$$

La función de Green es **continua** en todo el intervalo $[\,0\,,\pi\,]$:

$$G\left(\xi^+,\xi\right) = G\left(\xi^-,\xi\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{B_2\,\left[\xi-(\pi+1)\right] = B_1\,\xi} \qquad (1)$$

La función de Green es discontinua (salto finito) en $x = \xi$:

$$\frac{\partial G(\xi^+)}{\partial x} - \frac{\partial G(\xi^-)}{\partial x} = \frac{1}{p(\xi)} \quad \Rightarrow \quad B_2 - B_1 = 1$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones, (1) y (2), con dos incógnitas, B_1 y B_2, resolvemos:

despejamos B_1 *de* (1) $\qquad B_1 = B_2 + 1$

sustituyendo en (2) $\qquad (B_2+1)\,\xi = B_2\left[\xi - (\pi+1)\right]$

$$\cancel{B_2\xi} + \xi = \cancel{B_2\xi} - B_2(\pi+1)$$

$$B_2 = \frac{\xi}{\pi+1}$$

Luego:

$$B_1 = \frac{\xi}{\pi + 1} - 1 \qquad\qquad B_2 = \frac{\xi}{\pi + 1}$$

Sustituimos entonces B_1 y B_2 en la función de Green, por las expresiones obtenidas:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \left[-1 - \dfrac{\xi}{\pi + 1}\right] x & 0 \leq x < \xi \\ \\ \left[\dfrac{\xi}{\pi + 1}\right] \left[x - (\pi + 1)\right] & \xi < x \leq \pi \end{cases}$$

Operando llegamos a:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x \;+\; \dfrac{\xi}{\pi + 1}\, x & 0 \leq x < \xi \\ \\ \xi \;+\; \dfrac{x}{\pi + 1}\, \xi & \xi < x \leq \pi \end{cases}$$

En la que podemos comprobar que si intercambiamos los papeles de x y de ξ, la función de Green es simétrica.