Hoja 2 **PROBLEMAS DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA** Curso 2010/2011

1. Sea el conjunto de polinomios $U_n(x)$ (polinomios de Chebichev de segunda especie o de tipo II) definidos por la función generatriz

$$G(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n.$$

   a) Hallar la relación de recurrencia de los polinomios U_{n+1}, U_n y U_{n-1} .

   b) Demostrar que $U_0(x) = 1$ y, mediante la fórmula de recurrencia, escribir los seis primeros polinomios ($n \leq 5$).

   c) Calcular $U_n(1)$, $U_n(-1)$ y $U_n(0)$.

   d) Demostrar que $U_n(x) = (-1)^n U_n(-x)$.

2. Demostrar que las derivadas $P_l'(x)$ de los polinomios de Legendre forman un conjunto completo en el intervalo $[-1,1]$. Escribir la relación de ortogonalidad.

3. Utilizando la función generatriz de los polinomios de Legendre, demostrar

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{l+1}}{l+1} P_l(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \ .$$

4. Hallar el valor de la integral $\int_0^1 dx P_l(x)$, (a) mediante la función generatriz, (b) aplicando la relación de recurrencia (que previamente se deducirá) $lP_l(x) + P_{l-1}'(x) - xP_l'(x) = 0$, y (c) aplicando la relación de recurrencia (que previamente se deducirá) $P_{l+1}'(x) - P_{l-1}'(x) = (2l+1)P_l(x)$.

5. *a*) Hallar la integral $\int_0^1 dx\, x\, P_l(x)$ partiendo de la fórmula de recurrencia pura.

   b) Hallar el desarrollo en serie de polinomios de Legendre de $f(x) = |x|$.

6. La función generatriz asociada a los polinomios de Chebichev $U_n(x)$ de tipo II viene dada por

$$G(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n.$$

   Obtener el valor de $U_n'(0)$ a partir de dicha función generatriz.

7. A partir de la transformada de Fourier de los polinomios de Hermite obtener una representación integral de los mismos.

8. *a*) Calcular la integral $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-x^2}\, x^2 H_n(x) H_m(x)$.

   b) A partir del resultado anterior, calcular la suma $\sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-x^2}\, x^2 H_1(x) H_m(x)$.

9. *a*) Expresar la función e^{2x-1} como desarrollo en serie de los polinomios de Hermite $H_n(x)$.

   b) Calcular la integral

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-(x-1)^2} \frac{dH_n(x)}{dx}$$

10. En espectroscopía molecular suelen aparecer con frecuencia integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-x^2}\, x^r H_n(x) H_{n+p}(x)$$

   con n, p, r enteros no negativos y $p \geq r$. Evaluar dicha integral.

11. *a*) Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-x^2}\, x H_n'(x) H_m'(x) = \sqrt{\pi} 2^{n+1} n(n+1)!\, \delta_{n,m-1} + \sqrt{\pi} 2^n (n-1) n!\, \delta_{n,m+1} \ ,$$

   donde $H_n'(x) = dH_n(x)/dx$.

b) A partir del resultado anterior, demostrar que

$$\sum_{p=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-x^2}\, xH_n'(x)H_{n+p}'(x) = \sqrt{\pi}2^{n+1}n(n+1)!\ .$$

12. Desarrollar la función $\mathrm{e}^{\lambda x}$ en serie de polinomios de Hermite y de polinomios de Laguerre.

13. Evaluar la integral

$$\int_0^{\infty} dx\, x^{\alpha+1}\, \mathrm{e}^{-x}\, L_n^{\alpha}(x)L_m^{\alpha}(x)\ .$$

14. Hallar la transformada de Laplace de los polinomios de Laguerre.

15. La parte radial normalizada de la función de onda del átomo de hidrógeno viene dada por

$$R_{nl}(r) = \left[\alpha^3\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\right]^{1/2} \mathrm{e}^{-\alpha r/2}(\alpha r)^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\alpha r)\ ,$$

donde α es una constante. Calcular la distancia media del electrón respecto del núcleo: $\langle r\rangle = \int_0^{\infty} dr\, r^3\, [R_{nl}(\alpha r)]^2$.

16. Desarrollar en serie de polinomios de Laguerre la función salto $f(x) = H(x-a)$, siendo $H(x)$ la función de Heaviside.

17. Los polinomios de Chebychev de primera especie (o tipo I), $T_n(x)$, satisfacen la relación de recurrencia

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x),$$

con $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$.

a) Obtener la función generatriz

$$G(x,t) = T_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^n, \quad |x| \le 1, \quad |t| < 1.$$

b) Utilizar el resultado anterior para calcular $T_n(0)$, $T_n(1)$, $T_n(-1)$.

18. Sean $f_n(x)$ las funciones definidas mediante las relaciones

$$f_0(x) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{(r!)^2}\ \ ,\ \ (n+1)f_{n+1} = xf_n - f_{n+2}\ \ ,\ \ f_n' = f_{n-1}\ \ .$$

Demostrar que la función generatriz $G(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x)t^n$ viene dada por $\exp(xt + 1/t)$.

19. Teniendo en cuenta el desarrollo de Fourier de $\exp(ix \operatorname{sen}\varphi)$, hallar una representación integral de las funciones de Bessel de orden entero.

20. Hallar los coeficientes del desarrollo en serie de $J_0(k_m x)$ de la función $f(x) = 1$ definida en el intervalo $0 \le x < a$ y $f(x) = 0$ para $x = a$.

21. Sea

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_n\left(\alpha_{nm}x\right)\ ,$$

la representación en serie de funciones de Bessel de la función $f(x)$ definida en el intervalo $[0,1]$, donde α_{nm} es la raíz m-sima de $J_n(x)$.

a) Probar la relación de Parseval

$$\int_0^1 dx\, x[f(x)]^2 = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2\left[J_{n+1}\left(\alpha_{nm}\right)\right]^2\ .$$

b) Escogiendo $f(x) = x^n$, probar que las raíces α_{nm} verifican la relación

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{nm}^2} = \frac{1}{4(n+1)}.$$

22. Calcular la transformada de Laplace de $J_0(ax)$, donde $-\infty < a < +\infty$.