MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

REALIZADO POR:

Clara Gómez García

Mª Jesús Macías Castillo

Noelia Solís Preciado

Juan Villa Morales

Problema Nº 11 Hoja 2:

A) Demostrar que

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} x H_n'(x) H_m'(x) = \sqrt{\pi} 2^{n+1} n(n+1)!\, \delta_{n,m-1} + \sqrt{\pi} 2^n (n-1) n!\, \delta_{n,m+1}}$$

$$\boldsymbol{donde\ \ H_n'(x) = \frac{dH_n(x)}{dx}}$$

B) A partir del resultado anterior, demostrar que

$$\sum_{p=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} x H_n'(x) H_{n+p}'(x) = \sqrt{\pi} 2^{n+1} n(n+1)!$$

Este problema trata sobre los polinomios de Hermite, para los cuales el producto escalar se define de la siguiente manera:

$$< H_n / H_m > = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = \sqrt{\pi} 2^n n!\, \delta_{n,m}$$

Y además conocemos las relaciones de recurrencia para estos polinomios, halladas teóricamente:

(I) $H_n^{'}(x) = 2n\, H_{n-1}(x)$

(II) $H_{n+1}(x) - 2\mathrm{x}\, H_n(x) + 2n\, H_{n-1}(x) = 0$

Luego, con estas relaciones de recurrencia, buscaremos una expresión que sea similar a la definición de producto escalar, para así demostrar lo que se nos pide.

Primero aplicamos la relación (I):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} x H_n^{'}(x) H_{n+p}^{'}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} x 2n H_{n-1}(x) 2m H_{m-1}(x)$$

Como tenemos el término $2xH_{n-1}(x)$, le podemos aplicar la relación de recurrencia (II) y nos queda:

$$2\mathrm{x}\, H_{n-1}(x) = H_n(x) + 2(n-1)\, H_{n-2}(x)$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} x 2n H_{n-1}(x) 2m H_{m-1}(x) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} n\{H_n(x) + 2(n-1)\, H_{n-2}(x)\} 2m H_{m-1}(x)$$

Operando y separando en dos integrales nos queda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} n\{H_n(x) + 2(n-1)\, H_{n-2}(x)\} 2m H_{m-1}(x) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} n H_n(x) 2m H_{m-1}(x) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} 2n(n-1)\, H_{n-2}(x) 2m H_{m-1}(x)$$

Ahora podemos considerar cada integral por separado y hallar el valor de cada una:

1ª <u>Integral</u> $\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2} nH_n(x)2mH_{m-1}(x)$

Teniendo en cuenta que los términos n, m pueden salir de la integral junto con el 2, ya que no dependen de x:

$$2nm\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2} H_n(x)H_{m-1}(x)$$

Donde $\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2} H_n(x)H_{m-1}(x)$ es el producto escalar $< H_n/H_{m-1} >$ cuando $n = m - 1$. Entonces, escribiéndolo en términos de n siendo $n + 1 = m$, se obtiene:

$$2nm\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2} H_n(x)H_{m-1}(x) = 2n(n+1)\sqrt{\pi}2^n n!\, \delta_{n,m-1} =$$
$$= \sqrt{\pi}2^{n+1} n(n+1)!\, \delta_{n,m-1}$$

2ª <u>Integral</u> $\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2} 2n(n-1)\, H_{n-2}(x)2mH_{m-1}(x)$

Teniendo en cuenta que los términos $2n, 2m$ y $(n - 1)$ pueden salir de la integral, ya que no dependen de x:

$$2n2m(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2} H_{n-2}(x)H_{m-1}(x)$$

donde $\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2} H_{n-2}(x)H_{m-1}(x)$ es el producto escalar $< H_{n-2}/H_{m-1} >$ cuando $n - 2 = m - 1$. Entonces, escribiéndolo en términos de n siendo $n - 1 = m$, se obtiene:

$$2n2m(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2} H_{n-2}(x)H_{m-1}(x) =$$
$$= 2n\; 2(n-1)^2\sqrt{\pi}2^{n-2}\, (n-2)!\, \delta_{n,m+1} = \sqrt{\pi}2^n(n-1)n!\, \delta_{n,m+1}$$

Por tanto, considerando ambas integrales tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} x H_n'(x) H_m'(x) = \sqrt{\pi} 2^{n+1} n(n+1)!\, \delta_{n,m-1} + \sqrt{\pi} 2^n (n-1) n!\, \delta_{n,m+1}$$

como queríamos demostrar.

C) A partir del resultado anterior, demostrar que

$$\sum_{p=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} x H_n'(x) H_{n+p}'(x) = \sqrt{\pi} 2^{n+1} n(n+1)!$$

Fijándonos en el primer apartado, vemos la relación entre los subíndices:

$$n = n$$

$$m = n + p$$

Con estas igualdades sustituimos en la expresión del apartado anterior.

$$\sum_{p=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} x\, H_n'(x)\, H_{n+p}'(x)$$
$$= \sqrt{\pi} 2^{n+1}\, n(n+1)!\, \delta_{n,n+p-1} + \sqrt{\pi} 2^n (n-1) n!\, \delta_{n,n+p+1}.$$

Sabemos que la delta de Kronocker puede tomar valores 1 o 0 dependiendo de si los subíndices son iguales o distintos, así que, si en esta expresión igualamos nuestros subíndices de la delta del primer y segundo sumando respectivamente, tenemos:

$$n = n + p - 1 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow \delta_{n,n+p-1} = 1$$

$$n = n + p + 1 \Longrightarrow p = -1$$

Fijándonos en el enunciado, vemos que el sumatorio va de 0 a ∞, por lo que no está permitido el valor $p = -1$ por lo que se llega a la conclusión de que:

$$n \neq n + p + 1 \Rightarrow \delta_{n,n+p+1} = 0$$

Para los demás valores posibles de p (excepto el uno), las deltas de Kronecker se hacen cero debido a las propiedades de estas, sobreviviendo únicamente el término correspondiente a $p = 1$. Esto es:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} x\, H_n^{'}(x)\, H_{n+p}^{'}(x) = \sqrt{\pi} 2^{n+1}\, n(n+1)!$$

Vemos que esto coincide con la demostración del enunciado, luego ya está verificada la igualdad.