TEMA 2. Ejercicio 17

Fraire González, Juan Jesús
Gordillo Guerrero, Fernando
Fernández Fernández, Ana Belén
Gerona Plá, Federico

Diciembre 2008

Los Polinomios de Chebycheb de primera especie (o tipo I), $T_n(x)$, satisfacen la relación de recurrencia

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

con $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$.

1. **Obtener la función generatriz**

$$G(x,t) = T_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^n, \qquad |x| \leq 1, \qquad |t| < 1$$

2. **Utilizar el resultado anterior para calcular $T_n(0)$, $T_n(1)$, $T_n(-1)$.**

1. A partir de la relación de recurrencia:

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} T_{n+2}(x)t^n}_{n+2=n'} = 2x\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} T_{n+1}(x)t^n}_{n+1=n'} - \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n$$

Obtenemos que:

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} T_n(x)t^{n-2}}_{(2)} = 2x\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^{n-1}}_{(3)} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n}_{(4)} \tag{1}$$

Sabemos que la función generatriz es de la forma:

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n$$

Por lo que hemos de desarrolar esta función de forma adecuada para identificar términos en la relación de recurrencia:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^{n-2} = t^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = t^{-2}\left[T_0(x) + T_1(x)\cdot t + \sum_{n=2}^{\infty} T_n(x)t^n\right] =$$

$$= t^{-2}\cdot T_0(x) + t^{-2}\cdot T_1(x)\cdot t + t^{-2}\sum_{n=2}^{\infty} T_n(x)t^n = T_0(x)t^{-2} + T_1(x)t^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} T_n(x)t^{n-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = T_0(x)t^{-2} + T_1(x)t^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} T_n(x)t^{n-2}$$

En rojo aparece la función que buscábamos, si la despejamos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} T_n(x)t^{n-2} = t^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n - T_0(x)t^{-2} - T_1(x)t^{-1} = G(x,t)t^{-2} - T_0(x)t^{-2} - T_1(x)t^{-1}$$

Así pues:

$$\sum_{n=2}^{\infty} T_n(x)t^{n-2} = G(x,t)t^{-2} - T_0(x)t^{-2} - T_1(x)t^{-1} \tag{2}$$

Con el otro sumatorio que nos queda hacemos igual:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^{n-1} = t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = t^{-1}\left[T_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^n\right] =$$

$$= t^{-1}\cdot T_0(x) + t^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^n = T_0(x)t^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = T_0(x)t^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^{n-1}$$

En azul aparece la función que buscábamos, si la despejamos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^{n-1} = t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n - T_0(x)t^{-1} = G(x,t)t^{-1} - T_0(x)t^{-1}$$

Así pues:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^{n-1} = G(x,t)t^{-1} - T_0(x)t^{-1} \tag{3}$$

Si nos fijamos, el último sumando es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = G(x,t) \tag{4}$$

Si sustituimos estos resultados en (1):

$$\sum_{n=2}^{\infty} T_n(x)t^{n-2} = 2x\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n$$
$$G(x,t)t^{-2} - T_0(x)t^{-2} - T_1(x)t^{-1} = 2x\left[G(x,t)t^{-1} - T_0(x)t^{-1}\right] - G(x,t)$$

Si sustituimos $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$:

$$G(x,t)t^{-2} - t^{-2}(1+xt) = 2xG(x,t)t^{-1} - 2xt^{-1} - G(x,t)$$
$$G(x,t)t^{-2} + G(x,t) - 2xG(x,t)t^{-1} = t^{-2}(1+xt) - 2xt^{-1}$$
$$G(x,t)(t^{-2} + 1 - 2xt^{-1}) = t^{-2} + xt^{-1} - 2xt^{-1}$$
$$G(x,t) = \frac{t^{-2} - xt^{-1}}{t^{-2} + 1 - 2xt^{-1}}$$

Si multiplicamos tanto el numerador como el denominador por t^2:

$$\boxed{G(x,t) = \frac{1 - xt}{t^2 - 2xt + 1}}$$

2. Para poder calcular $T_n(0)$, $T_n(1)$ y $T_n(-1)$ tenemos que calcular las $G(x,t)$ asociadas, desarrollar en serie e identificar coeficientes:

(a) $T_n(0)$:

$$G(0,t) = \frac{1 - \cancelto{0}{xt}}{t^2 - \cancelto{0}{2xt} + 1} = \frac{1}{1+t^2}$$
$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$$

$$\boxed{T_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \equiv \text{impar} \\ (-1)^{n/2} & \text{si} \quad n \equiv \text{par} \end{cases}}$$

(b) $T_n(1)$:

$$G(1,t) = \frac{1 - (1)\cdot t}{t^2 - 2\cdot(1)\cdot t + 1} = \frac{1-t}{t^2 - 2t + 1} = \frac{\cancel{1-t}}{(1-t)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{1-t}$$
$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (1)\cdot t^n$$

$$\boxed{T_n(1) = 1}$$

(c) $T_n(-1)$:

$$G(-1,t) = \frac{1 - (-1)\cdot t}{t^2 - 2\cdot(-1)\cdot t + 1} = \frac{1+t}{t^2 + 2t + 1} = \frac{\cancel{1+t}}{(1+t)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{1+t}$$
$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

$$\boxed{T_n(1) = (-1)^n}$$