JUAN FERNANDO BRAVO PAREDES
PEDRO JOSÉ MUÑOZ REYES
ÁNGEL HIERRO GARDETA

Problema 19-Tema 2:
Hallar los coeficientes del desarrollo enserie de $J_0(k_m x)$ de la función $f(x) = 1$ definida en el intervalo $0 \le x \le a$ y $f(x) = 0$ para $x = a$.

Según el *desarrollo en serie de Bessel-Fourier*: dado que *f(x)* es una función bien comportada (suave ó de cuadrado sumable) en el intervalo *[0,a],* se verifica que:

$$\boxed{f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_n(K_m x)} \qquad \text{donde} \qquad C_m = \frac{\int_0^a dx\, J_n(K_m x) f(x)\, x}{\frac{1}{2}a^2 [J_{n+1}(\alpha_{nm})]^2}$$

Para nuestro problema tendremos:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_0(K_m x) \qquad (1)$$

donde:

$$C_m = \frac{(J_0(K_m x), f(x))}{\|J_0(K_m x)\|^2} \Rightarrow C_m = \frac{\int_0^a dx J_0(K_m x) f(x) x}{\frac{1}{2} a^2 [J_1(\alpha_{0m})]^2} \qquad (2)$$

La norma se obtiene de la relación de ortogonalidad:

$$\|\psi_m\|^2 = \frac{1}{2} K_m^{-2} \left\{ (K_m^2 x^2 - n^2)\psi_m^2(x) + x^2 \left[\psi_m'(x) \right]^2 \right\}_a^b$$

El valor de la norma depende de las condiciones de contorno, en nuestro caso son las de ***Dirichlet*****:** ***y(0)=0 , y(a)=0***, con lo que:

$$\|J_n(K_m x)\|^2 = \int_a^b J_n^2(kx) x\, dx = \frac{1}{2}\left\{ x^2 [J_{n+1}(kx)]^2 \right\}_a^b$$

Luego:

$$\|J_0(K_m x)\|^2 = \frac{1}{2} a^2 [J_1(\alpha_{0m})]^2$$

Los α_{nm} representan el *m-esimo cero* de la función de Bessel de primera especie $J_n(x)$, es decir: $J_n(\alpha_{nm})=0$.
La verificación de las condiciones de contorno (*y(a)=0, y(0)=0*) restringen los valores posibles de *K*, que será los *autovalores* K_m. Por lo tanto, (como nuestro intervalo es: $0 \le x \le a$), las *autofunciones* serán de la forma:

$$\psi_m(x) = J_n\left(\alpha_{nm} \frac{x}{a}\right)$$

esto es: $J_n(K_m a)=0$, $K_m a = \alpha_{0m}$ => $\boxed{K_m = \frac{\alpha_{0m}}{a}}$

Evaluamos: $\int_0^a dx J_o(K_m x) x$ haciendo uso del cambio de variable $y = \alpha_{0m} \frac{x}{a}$; $dx = \frac{a}{\alpha_{0m}} dy$

$$\int_0^a dx J_o\left(\alpha_{0m} \frac{x}{a}\right) x = \int_0^{\alpha_{0m}} dy \left(\frac{a}{\alpha_{0m}}\right)^2 y J_0(y) = \left(\frac{a}{\alpha_{0m}}\right)^2 \int_0^{\alpha_{0m}} dy J_0(y) y$$

A partir de la relación de recurrencia:

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m x^n J_n(x) = x^{n-m} J_{n-m}(x)} \Rightarrow \frac{1}{x}\frac{d}{dx} x^n J_n(x) = x^{n-1} J_{n-1}(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} x^n J_n(x) = x^n J_{n-1}(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} x J_1(x) = x J_0(x)$$

Tenemos que:

$$\left(\frac{a}{\alpha_{0m}}\right)^2 \int_0^{\alpha_{0m}} dy \frac{d}{dy} yJ_1(y) = \left(\frac{a}{\alpha_{0m}}\right)^2 \left[yJ_1(y)\right]_0^{\alpha_{0m}} = \left(\frac{a}{\alpha_{0m}}\right)^2 \alpha_{0m} J_1(\alpha_{0m})$$

Así pues de la ecuación (2) se tiene:

$$\boxed{C_m = \left(\frac{a}{\alpha_{0m}}\right)^2 \frac{\alpha_{0m} J_1(\alpha_{0m})}{\frac{1}{2} a^2 \left[J_1(\alpha_{0m})\right]^2} = \frac{2}{\alpha_{0m} J_1(\alpha_{0m})}}$$

Hasta aquí lo que nos pide el problema. El profesor nos pidió que calculásemos además lo siguiente:

* Obtenemos de forma explícita los valores de C_m para $m= 1, 2, 3$:

m	α_{0m}	$J_1(\alpha_{0m})$	C_m
1	2.40483	0.520	1.632
2	5.52008	-0.345	-1.054
3	8.65373	0.273	0.848

Los valores de α_{0m} y de $J_1(\alpha_{0m})$ los hemos obtenidos de tablas.

* Hacemos una estimación de ***f(x)*** con los tres primeros términos de la serie dada por la expresión (1) para el intervalo $0 \le x \le a$, (hemos tomado $a = 1$), con $x = 0.2, 0.5, 0.8$:

$$f(x) = C_1 J_0(K_1 x) + C_2 J_0(K_2 x) + C_3 J_0(K_3 x)$$

(NOTA: Los valores de $J_0(K_m x)$ los hemos obtenido de tablas)

x	m	$K_m = \alpha_{0m}/a$	$K_m x$	$J_0(K_m x)$	C_m	$f(x)$
0.2	1 2 3	2.405 5.520 8.654	0.481 1.104 1.731	0.196 0.440 0.582	1.632 -1.054 0.848	**0.350**
0.5	1 2 3	2.405 5.520 8.654	1.203 2.760 4.327	0.498 0.410 -0.139	1.632 -1.054 0.848	**0.263**
0.8	1 2 3	2.405 5.520 8.654	1.924 4.476 6.923	0.582 -0.203 0.182	1.632 -1.054 0.848	**1.318**

Por lo tanto, tomando sólo los 3 primeros términos de la serie, la estimación obtenida de $f(x)$ no es buena (recordemos que: $f(x)$=1).