GRUPO 1: BELÉN CARO MARROYO, MIGUEL GARCÍA DIÉGUEZ, AMALIA TOBOSO CASTAÑERA.

Hoja de problemas nº: 2

21. Calcular la transformada de Laplace de $J_0(ax)$, donde $-\infty < a < +\infty$.

En este ejercicio utilizaremos la expresión de $J_0\,(ax)$ que se obtiene a partir de la representación integral. Como ya vimos en el ejercicio 18 de la hoja 2:

$$J_0(ax) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(iaxsen\theta d\theta)$$

Una vez definida la función, podemos pasar a calcular su transformada de Laplace, recordando que la forma general de esta transformada es la siguiente: $L\left[f\left(x\right)\right] = \int\limits_0^{\infty} dx \exp(-sx)\,f(x)$.

En nuestro caso la transformada de Laplace tendría esta forma:

$$F(s) = \int\limits_0^{\infty} dx e^{-sx}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(iaxsen\theta d\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\infty} dx \exp[x(iasen\theta - s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{iasen\theta - s}\exp[x(iasen\theta - s)]\ \Big|_0^{\infty}$$

$\lim_{x\to\infty} \exp(iasen\theta x)$ es una función oscilante.

$\lim_{x\to\infty} \exp(-sx) \to 0$

Como exp(-sx) prevalece sobre $\exp(iasen\theta x)$ nos queda que:

$\exp[x(iasen\theta - s)]\ \Big|_0^{\infty} = -1$, y por tanto $F(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{s - iasen\theta}$.

Fijándonos en la integral que nos queda, observamos que es una integral típica cuya resolución precisa del Teorema del Residuo.

Para calcular una integral por el Teorema del Residuo es necesario hacer el siguiente cambio: $z = \exp(i\theta)$, por lo que $d\theta = \frac{dz}{iz}$ y $sen\theta = \frac{z^2 - 1}{2iz}$. Sustituyendo en la integral tenemos:

$$F(s)=\frac{1}{2\pi}\oint_c \frac{dz}{iz\left(s-ia\frac{z^2-1}{2iz}\right)}$$, donde $C=\{z,|z|=1\}$.

Si sacamos 1/i de la integral e introducimos z dentro del paréntesis, tendríamos lo siguiente:

$F(s)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{dz}{-\frac{a}{2}z^2+sz+\frac{a}{2}}$, o lo que es lo mismo $F(s)=\frac{1}{\pi i}\oint_c \frac{dz}{-az^2+2sz+a}$.

Calculemos ahora los polos de la función f(z):

f(z) tiene polos donde $-az^2+2sz+a=0$, y eso es en $z=\frac{s}{a}\mp\frac{\sqrt{s^2+a^2}}{a}$.

Una vez conocidos los polos de la función, lo único que nos queda es aplicar el Teorema del Residuo: $\oint_c f(z)dz=2\pi i\sum C_i$, donde Ci son los residuos de la función en los distintos polos.

Ahora lo que se deberá hacer es elegir el polo con el que calcularemos el residuo, nosotros hemos elegido $z=C=\frac{s}{a}+\frac{\sqrt{s^2+a^2}}{a}$, ya que suponemos $\left|\frac{s}{a}\right|<1$. Sin embargo, si quisiésemos evaluar el residuo para $\left|\frac{s}{a}\right|>1$ tendríamos que utilizar el otro polo, $z=\frac{s}{a}-\frac{\sqrt{s^2+a^2}}{a}$, con el que obtendríamos un resultado equivalente.

Así, el residuo de f(z) tendrá el siguiente valor:

$$C_1=\lim_{z\to\frac{s}{a}+\frac{\sqrt{s^2+a^2}}{a}}\left(z-\frac{s}{a}-\frac{\sqrt{s^2+a^2}}{a}\right)\frac{1}{\left(z-\frac{s}{a}-\frac{\sqrt{s^2+a^2}}{a}\right)\left(z-\frac{s}{a}+\frac{\sqrt{s^2+a^2}}{a}\right)}=\frac{a}{2\sqrt{s^2+a^2}},$$

sustituyendo en nuestra integral tenemos que:

$$F(s)=\frac{1}{\pi i}\cdot 2\pi i\frac{a}{2\sqrt{s^2+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{s^2+a^2}}$$