Métodos de la Física Matemática

Tema 2 – Funciones especiales

María F. Collado Caballero
Antonio E. Hurtado Romero
Esther Leal Cidoncha
Isabel Mª Martín Ríos

Hoja 2 - Problema 22º

Calcular la transformada de Laplace de $J_0(ax)$ donde $-\infty < a < +\infty$.

En este ejercicio utilizaremos la expresión de $J_0(ax)$ que hemos obtenido en el ejercicio 19 de la hoja 2:

$$J_0(ax) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iax\sin\theta} d\theta$$

Una vez definida la función, pasaremos a calcular su transformada de Laplace, utilizando la fórmula general:

$$\mathcal{L}\left[f(x)\right] = \int_0^{\infty} e^{-s\cdot x} f(x) dx = F(s)$$

En nuestro caso $f(x) = J_0(ax)$, entonces la transformada queda:

$$\mathcal{L}\left[J_0(ax)\right] = \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iax\sin\theta} d\theta dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{x(ia\sin\theta - s)} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{ia\sin\theta - s} e^{x(ia\sin\theta - s)}\Big|_0^{\infty}$$

Aplicando los límites obtenemos que el término exponencial:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} e^{iax\sin\theta} \text{ es una función oscilante} \\ \lim\limits_{x\to\infty} e^{-sx} = 0 \end{cases}$$

Como e^{-sx} prevalece sobre $e^{iax\sin\theta}$ nos queda que: $e^{x(ia\sin\theta - s)}\Big|_0^{\infty} = -1$ y por tanto tenemos que la transformada queda de la forma:

$$F(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{s - ia\sin\theta}$$

Para resolver esta integral aplicamos el Teorema del Residuo. Para ello hacemos el siguiente cambio: $z = e^{i\theta}$, por lo que $d\theta = \frac{dz}{iz}$ y $\sin\theta = \frac{z^2 - 1}{2iz}$. Sustituyendo en la integral:

$$F(s) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{dz}{iz\left(s - ia\frac{z^2 - 1}{2iz}\right)} \quad \text{donde} \quad C = \{z, |z| = 1\}$$

Si sacamos $\frac{1}{i}$ de la integral e introducimos z dentro del paréntesis, tendríamos lo siguiente:

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{-\frac{a}{2}z^2 + sz + \frac{a}{2}} = \frac{1}{\pi i} \oint_C \frac{dz}{-az^2 + 2sz + a}$$

Calculemos ahora los polos de la función $f(z) = \frac{1}{-az^2 + 2sz + a}$

Resolviendo la ecuación $-az^2 + 2sz + a = 0$ obtenemos los polos: $\begin{cases} z_1 = \frac{s}{a} - \frac{\sqrt{s^2 + a^2}}{a} \\ z_2 = \frac{s}{a} + \frac{\sqrt{s^2 + a^2}}{a} \end{cases}$

Aplicamos el Teorema del Residuo:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum b_1$$

Ahora lo que se deberá hacer es elegir el polo con el que calcularemos el residuo, nosotros hemos elegido z_2.

Así, el residuo de $f(z)$ tendrá el siguiente valor:

$$b_1 = \lim_{z \to z_2} (z - z_2) \frac{1}{(z - z_2)(z - z_1)} = \lim_{z \to z_2} \frac{1}{z - \frac{s}{a} + \frac{\sqrt{s^2 + a^2}}{a}} = \frac{a}{2\sqrt{s^2 + a^2}}$$

sustituyendo en nuestra integral tenemos que:

$$\boxed{F(s) = \frac{1}{\pi i} 2\pi i \frac{a}{2\sqrt{s^2 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{s^2 + a^2}}}$$