# MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA (08 – 09)

***Mónica Capilla Alba***

***Jesús M. Gómez Romero***

**Ejercicio 3.-** Utilizando la función generatriz de los polinomios de Legendre, demostrar:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{l+1}}{l+1} P_l(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Tenemos como función generatriz:

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \tag{1}$$

Y sabemos que:

$$G(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)\, t^l \tag{2}$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2), tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)\, t^l \tag{3}$$

Veamos el miembro de la derecha:

$$\int_0^x G(x,t) = \int_0^x \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)\, t^l \, dt = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) \int_0^x t^l \, dt \tag{4}$$

Resolviendo la integral:

$$\int t^l \, dt = \frac{t^{l+1}}{l+1} \tag{5}$$

Entonces:

$$\int_0^x G(x,t)\, dt = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) \frac{x^{l+1}}{l+1} \tag{6}$$

Veamos el miembro de la izquierda:

$$\int_0^x G(x,t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\, dt \tag{7}$$

La siguiente integral puede resolverse con un programa matemático:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-2ax+x^2}}\,dx \;=\; \ln\left(-a+x+\sqrt{x^2-2ax+1}\right) \tag{8}$$

Que para nuestro caso:

$$a \equiv x \qquad\qquad x \equiv t$$

Entonces tenemos que:

$$\frac{1}{\sqrt{t^2-2xt+1}}\,dt \;=\; \ln\left(-x+t+\sqrt{t^2-2xt+1}\right) \tag{9}$$

Particularizando para nuestros límites de integración:

$$\boldsymbol{t = x} \qquad\qquad \boldsymbol{t = 0}$$

Llegamos a que:

$$\ln\left(-x+x+\sqrt{x^2-2x^2+1}\right)-\ln\left(-x+0+\sqrt{0-0+1}\right)=\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)-\ln(1-x)=$$

$$=\ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\right)=\ln\left(\sqrt{\frac{(1+x)(1-x)}{(1-x)^2}}\right)=\ln\left(\sqrt{\frac{(1+x)}{(1-x)}}\right)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Igualando ambos resultados obtenidos para G(x,t):

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)\,\frac{x^{l+1}}{l+1} \;=\; \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \tag{10}$$

Como se quería demostrar.