Problema nº 8

a) Calcular la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{dxe^{-x^2}x^2H_n(x)\,H_m(x)}$.

En la integral dada queremos eliminar el factor x^2, ya que por las propiedades de ortogonalidad de los polinomios de Hermite sabemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{dxe^{-x^2}H_n(x)\,H_m(x) = \delta_{m,n}2^n n!\,\sqrt{\pi}}$$

Este factor podemos eliminarlo usando la siguiente relación de recurrencia:

$$xH_n(x) = \frac{1}{2}H_{n+1}(x) + nH_{n-1}(x)$$

Multiplicamos por x en ambos miembros de la igualdad:

$$x^2H_n(x) = \frac{x}{2}H_{n+1}(x) + xnH_{n-1}(x)$$

Aplicamos nuevamente la relación de recurrencia en el segundo miembro de la igualdad:

$$x^2H_n(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}H_{n+2}(x) + (n+1/2)H_n(x)\right) + n\left(\frac{1}{2}H_n(x) + (n-1)H_{n-2}(x)\right)$$

Operando tenemos:

$$x^2H_n(x) = \frac{1}{4}H_{n+2}(x) + (n+1/2)H_n(x) + n(n-1)H_{n-2}(x)$$

Sustituimos en la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ e^{-x^2}\left(\frac{1}{4}H_{n+2}(x) + (n{+}1/2)H_n(x) + n(n-1)H_{n-2}(x)\right)H_m(x)$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2}H_{n+2}H_m + \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2}\, H_nH_m$$

$$+ n(n-1)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2}\, H_{n-2}H_m$$

$$= \frac{1}{4}2^{n+2}(n+2)!\,\sqrt{\pi}\delta_{m,n+2} + \left(n+\frac{1}{2}\right)2^n n!\,\sqrt{\pi}\delta_{m,n}$$

$$+ n(n-1)2^{n-2}(n-2)!\,\sqrt{\pi}\delta_{m,n-2}$$

b) A partir del resultado anterior, calcular la suma

$$\sum_{m=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} x^2 H_1(x) H_m(x)$$

En esta suma podemos ver que el subíndice n permanece fijo con valor n=1.
Analicemos cada término del resultado del apartado anterior de forma independiente:

$$\frac{1}{4}2^{n+2}(n+2)!\,\sqrt{\pi}\delta_{m,n+2}$$

En este caso sólo permanece el término con m=3 debido a la Delta de Kronecker y tenemos:

$$\frac{1}{4}2^{3}3!\,\sqrt{\pi}$$

En el segundo término:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right) * 2^{n}n!\,\sqrt{\pi}\delta_{m,n}$$

En este sólo permanece el término m=1 y tenemos como resultado:

$$3\sqrt{\pi}$$

El tercer término se anula por completo ya que tenemos una Delta $\delta_{m,n-2}$, igual en este caso a $\delta_{m,-1}$, y, puesto que la suma empieza con el valor m=0, vemos que siempre m≠n.

Además, aunque el recorrido de m incluyera el caso m=-1, el término seguiría siendo cero, al ser n=1.

$$n(n-1)2^{n-2}(n-2)!$$

$$1 * 0 * 2^{-1}(-1)! = 0$$

El resultado final es:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{dx}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2} \mathrm{x}^2 \mathrm{H}_1(\mathrm{x}) \mathrm{H}_\mathrm{m}(\mathrm{x}) = \frac{1}{4}2^{3}3!\,\sqrt{\pi} + 3\sqrt{\pi} = 26.5868$$