Hoja 3 **PROBLEMAS DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA** Curso 2010/2011

1. Un cuerpo semiinfinito situado sobre el semieje $x < 0$ se encuentra inicialmente a la temperatura u_0 . En el instante $t = 0$ se coloca en contacto térmico con otro cuerpo semiinfinito que ocupa las posiciones $x > 0$ y que está a la temperatura inicial $u = 0$. Teniendo en cuenta que la temperatura y su derivada espacial primera han de ser funciones continuas en $x = 0$ (¿por qué?) halla el campo de temperaturas $u(x,t)$ en ambos cuerpos como la solución de
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda(x)\frac{\partial u}{\partial t}\ , \qquad -\infty < x < \infty\ , \qquad t > 0,$$
$$\lambda(x) = \begin{cases} \lambda_1\ , & x < 0, \\ \lambda_2\ , & x > 0, \end{cases}$$
donde λ_1 y λ_2 son constantes, y
$$u(x,0) = \begin{cases} u_0 = \text{const}\ , & x < 0, \\ 0\ , & x > 0. \end{cases}$$

2. Una membrana cuadrada de lado π sujeta por sus bordes es inicialmente desplazada de modo que $u(x,y,0) = f(x,y)$ siendo su velocidad inicial nula, $u_t(x,y,0) = 0$.
   a) Se pide calcular su desplazamiento en cualquier otro instante.
   b) Halla $u(x,t)$ de forma explícita si el desplazamiento inicial es uniforme, $f(x,y) = u_0$.

3. Una barra de longitud L se encuentra térmicamente aislada sobre su superficie lateral y sus extremos se mantienen a temperatura cero. Si la temperatura inicial de la barra es constante, $u(x,0) = u_0$, se pide encontrar la distribución de temperaturas $u(x,t)$ en cualquier instante posterior mediante:
   a) El método de separación de variables.
   b) El método de las transformadas integrales.

4. Supongamos que la temperatura en la superficie ($x = 0$) de la Tierra varía de forma periódica en el tiempo de acuerdo con la expresión $u(x = 0, t) = T_0 + T_1 \text{sen}\omega t$. (a) Calcula la temperatura $u(x,t)$ a una profundidad x admitiendo que la difusividad térmica k es constante y que puede despreciarse la curvatura de la Tierra.

5. Resolver mediante separación de variables la ecuación de ondas
$$\partial_x^2 u + u = \partial_t^2 u, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad t > 0,$$
con las condiciones de contorno $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$ y la condición inicial $u(x,0) = \text{sen}(4\pi x)$, $u_t(x,0) = 0$.

6. Resolver el siguiente problema acerca de la distribución estacionaria de temperaturas en un sólido semiinfinito:
$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0\ , \qquad y > 0\ , \qquad -\infty < x < \infty,$$
$$u(x,0) = \begin{cases} u_0 = \text{const}\ , & |x| < a, \\ 0\ , & |x| > a, \end{cases}$$
$$\lim_{y\to\infty} u(x,y) < \infty.$$

7. Una cuerda tensa de longitud L, fijada en sus dos extremos, es separada de su posición de equilibrio de manera que en $t = 0$ tiene la forma de la figura 1. Su velocidad inicial es cero, es decir, $u_t(x,0) = 0$. Encuentra la expresión del desplazamiento $u(x,t)$ para cualquier $x \in [0,L]$ y para todo $t > 0$.

8. Halla la solución del siguiente problema de propagación de una onda a lo largo de una cuerda infinita:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ , \qquad -\infty < x < \infty\ , \qquad t > 0,$$
$$u(x,0) = \begin{cases} h\ , & |x| < \epsilon, \\ 0\ , & |x| > \epsilon, \end{cases}$$
$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\ .$$

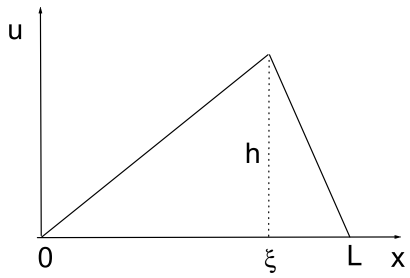

Figura 1: Posición inicial de la cuerda en el problema 7

9. Una barra cilíndrica muy larga (de longitud infinita para nuestros propósitos) de radio ρ inicialmente ($t = 0$) a la temperatura constante u_0 se introduce en un baño térmico cuya temperatura (constante) es u_1. Calcula de forma explícita el campo de temperaturas de la barra para cualquier instante posterior.

10. Halla mediante el método de la transformada de Laplace la solución del siguiente problema de difusión:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma^2 (u - u_1) = \frac{\partial u}{\partial t}\,, \qquad 0 \leq x \leq 1\,, \qquad t > 0,$$

con condiciones de contorno

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0$$

y condición inicial $u(x, 0) = u_0$.

11. Una barra de longitud π tiene inicialmente ($t = 0$) la temperatura $u(x, 0) = f(x)$. Sus extremos se mantienen a temperatura constante, $u(0, t) = 0$, $u(\pi, t) = 1$. En el instante $t = 0$ se la pone en contacto con una fuente de calor no estacionaria dada por $Q(x, t) = \operatorname{sen}(3x)\,\mathrm{e}^{-t}$. Se pide hallar la distribución de temperatura $u(x, t)$ en cualquier instante posterior mediante la resolución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t).$$

Halla expresiones explícitas para $u(x, t)$ si (a) $f(x) = x/\pi + \operatorname{sen} x$, y (b) $f(x) = x/\pi + \operatorname{sen} 3x$.

12. La temperatura en una varilla cilíndrica infinita de radio a satisface la ecuación diferencial

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right] T$$

con las condiciones: (i) $T = 0$ en $t = 0$, (ii) $T = T_0 \cos\varphi$ en $r = a$.

a) Comprobar que la solución estacionaria es de la forma $T = f(r)\cos\varphi$, hallando $f(r)$.

b) Utilizando el método de separación de variables, encontrar la solución general del problema.

Nota: Téngase en cuenta que $T(r, \varphi, t)$ debe estar definida para $r = 0$ y ser una función periódica de periodo 2π en φ para todo t.

13. Hallar la distribución de temperaturas $u(x, t)$ de una barra que inicialmente se encuentra a temperatura cero ($u(x, 0) = 0$), mantiene los extremos a esa temperatura ($u(\pm 1, t) = 0$) y posee en su interior una fuente de calor constante. La ecuación de difusión es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8$$