MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

CLARA GÓMEZ GARCÍA

Mª JESÚS MACÍAS CASTILLO

NOELIA SOLÍS PRECIADO

JUAN VILLA MORALES

PROBLEMA 10 HOJA 3:

Hallar la solución del siguiente problema de propagación de una onda a lo largo de una cuera infinita:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,, \qquad -\infty < x < \infty\,, \qquad t > 0\,,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} h\,, & |x| < \epsilon \\ 0\,, & |x| > \epsilon \end{cases} \quad , \quad \left.\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\,.$$

Para resolver este problema utilizamos las transformadas de Fourier, debido a que en general, si las variables espaciales recorren la recta real, es conveniente tomar éstas. Aunque podría resolverse por los otros métodos de resolución.

Tenemos que la transformada de Fourier sobre la variable espacial x, es:

$$\tilde{u}(\xi,t) = \mathcal{F}[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-i\xi x}\, u(x,t)$$

Expresamos nuestra ecuación del siguiente modo:

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Empezamos calculando la transformada de Fourier del primer miembro:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-i\xi x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Que integrando por partes obtenemos:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} e^{-i\xi x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-i\xi x} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} e^{-i\xi x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\xi\left[u e^{-i\xi x}\right]_{-\infty}^{\infty} + (i\xi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-i\xi x}\, u(x,t)$$

Donde los dos primeros sumandos se hacen cero por las condiciones de contorno

$$\begin{cases} u(x,t) \to 0, \quad para\ x \to \pm\infty \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} \to 0, \quad para\ x \to \pm\infty \end{cases}$$

Por tanto nos queda, aplicando la definición:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -\xi^2 \tilde{u}(\xi,t)$$

La transformada del segundo miembro viene dada por:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{F}[u(x,t)] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{u}(\xi,t)$$

La ecuación, en el espacio de Fourier, nos queda una ecuación en derivadas parciales de segundo orden:

$$c^2\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

$$-c^2\xi^2\tilde{u}(\xi,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{u}(\xi,t)$$

Y la solución de la ecuación diferencial anterior es

$$\tilde{u}(\xi,t) = A(\xi) sen(c\xi t) + B(\xi) cos(c\xi t)$$

Tenemos que determinar las constantes $A(\xi)$, $B(\xi)$. Entonces la función $B(\xi)$, viene dada por la transformada de Fourier en el instante inicial,

$$\tilde{u}(\xi,0) = B(\xi)$$

Por definición tenemos que

$$\tilde{u}(\xi,0) = \mathcal{F}[u(x,0)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-i\xi x}\, u(x,0)$$

El recorrido de la x va de -∞ a ∞, sin embargo fuera del intervalo de $-\epsilon$ a ϵ, $u(x,0)$ se hace 0, y dentro del intervalo de $-\epsilon$ a ϵ, $u(x,0) = h$; por tanto podemos tomar los siguientes límites de integración:

$$\tilde{u}(\xi,0) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\, e^{-i\xi x}\, h = -\frac{h}{i\xi}\left[e^{-i\xi x}\right]_{-\epsilon}^{\epsilon}$$

$$= \frac{h}{\xi}\left(\frac{e^{i\xi\epsilon} - e^{-i\xi\epsilon}}{i}\right) = \frac{2h}{\xi} sen(\xi\epsilon)$$

Por tanto tenemos que

$$B(\xi) = \frac{2h}{\xi} sen(\xi\epsilon)$$

Para calcular $A(\xi)$, hacemos la transformada de Fourier de la segunda condición inicial, $\left.\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$,

$$\left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathcal{F}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}\right) = \mathcal{F}(0) = 0$$

Haciendo $\left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right|_{t=0}$, tenemos:

$$\left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right|_{t=0} = c\xi A(\xi)\cos(c\xi t) - c\xi B(\xi) sen(c\xi t)|_{t=0} = c\xi A(\xi)$$

Igualando ambas expresiones, $A(\xi) = 0$.

Y la solución final en el espacio de Fourier es:

$$\tilde{u}(\xi,t) = \frac{2h}{\xi} sen(\xi\epsilon) cos(c\xi t)$$

Entonces ahora tendremos que hallar la transformada inversa de lo anterior, para hallar $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{u}(\xi,t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{i\xi x}\, \tilde{u}(\xi,t)$$

Con nuestra función tenemos:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{i\xi x}\, \frac{2h}{\xi} sen(\xi\epsilon) cos(c\xi t)$$

$$u(x,t) = \frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\ e^{i\xi x}\frac{1}{\xi}sen(\xi\epsilon)cos(c\xi t)$$

Sólo queda resolver esta integral haciendo antes operaciones matemáticas:

Hacemos el cambio de $\xi \to -\xi$, expresamos la exponencial en función de senos y cosenos, y por simetría consideramos dos veces el semintervalo de 0 a ∞,

$$u(x,t) = \frac{2h}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\xi\ \frac{1}{\xi}sen(\xi\epsilon)cos(c\xi t)\cos(\xi x)$$

Mediante la relación:

$$\cos A \cos \mathrm{B}\ sen\ C =$$

$$= sen(A+B+C) - sen(A+B-C) + sen(A-B+C) - sen(A-B-C)$$

Podemos expresar la integral así:

$$u(x,t) = \frac{2h}{\pi}\left[\int_{0}^{\infty} d\xi\ \frac{sen(\xi x + ct\xi + \xi\epsilon)}{\xi} - \int_{0}^{\infty} d\xi\ \frac{sen(\xi x + ct\xi - \xi\epsilon)}{\xi} \right.$$
$$\left. + \int_{0}^{\infty} d\xi\ \frac{sen(\xi x - ct\xi + \xi\epsilon)}{\xi} - \int_{0}^{\infty} d\xi\ \frac{sen(\xi x - ct\xi - \xi\epsilon)}{\xi}\right]$$

A partir de tablas de integrales, obtenemos la solución final a nuestro problema

$$u(x,t) =$$

$$h[f(\xi x + ct\xi + \xi\epsilon) - f(\xi x + ct\xi - \xi\epsilon) + f(\xi x - ct\xi + \xi\epsilon) - f(\xi x - ct\xi - \xi\epsilon)]$$

donde $f(x') = \begin{cases} 1 & x' > 0 \\ 0 & x' = 0 \\ -1 & x' < 0 \end{cases}$