MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA (07-08): Ejercicio 11, tema 3

Mónica Capilla Alba
Jesús Manuel Gómez Romero
José Antonio Paredes Moreno

Ejercicio 11 Resolver la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

con las condiciones de contorno $u(0,t) = u(1,t) = 0$ y la condición inicial $u(x,0) = sen(4\pi x)$ y $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$. El recorrido viene dado por $0 \le x \le 1$ y $t > 0$.

Tenemos que resolver la ecuación de ondas, que es una ecuación diferencial homogénea. Como el recorrido de la variable x es finito, resolvemos el problema por el método de `separación de variables`.

Para ello, suponemos que la solución es de la forma:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{2}$$

y sustituimos en la ecuación de ondas:

$$T(t)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)T(t) = X(x)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \tag{3}$$

ahora dividimos ambos miembros entre XT[1]:

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + 1 = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \tag{4}$$

De esta forma, el término de la izquierda sólo depende de la variable espacial x y el de la derecha de la variable temporal t. Esto sólo puede ocurrir si ambos miembros son iguales a una constante, que estableceremos de manera arbitraria.

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + 1 = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -K^2 \tag{5}$$

Con lo cual, podemos buscar las soluciones por separado y luego superponerlas para hallar la solución completa. Empecemos con la parte espacial:

$$X'' = (-K^2 - 1)X \tag{6}$$

Esta ecuación del tipo de Sturm-Liouville, puesto que tenemos que las condiciones de contorno son $X(0) = X(1) = 0$.

Su polinomio característico es $r^2 = (-K^2 - 1)$. Por tanto, debemos distinguir dos posibles soluciones:

[1] A partir de ahora omitiremos la dependencia de X y T, puesto que siempre será de x y t respectivamente.

$\underline{K = \pm i}$

En este caso, la solución tiene la forma:

$$X = Ax + B \tag{7}$$

Aplicamos las condiciones de frontera:

$$X(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \tag{8}$$

$$X(1) = 0 \Rightarrow A = -B = 0 \tag{9}$$

Es decir, topamos con la solución trivial.

$\underline{K \neq \pm i}$

En este caso:

$$X = Ae^{\sqrt{-K^2-1}x} + Be^{-\sqrt{-K^2-1}x} = Asen(\sqrt{-K^2-1}x) + Bcos(\sqrt{-K^2-1}x) \tag{10}$$

donde las constantes son genéricas y las hallaremos aplicando las condiciones de contorno:

$$X(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \tag{11}$$

Para la segunda condición, separamos las posibles soluciones:

$$Asen(\sqrt{-K^2-1}x) = 0 \tag{12}$$

- $A = 0$, que nos lleva a la solucón trivial

- $-K^2 = n^2\pi^2 + 1$ que nos da los autovalores de la función

Así pues, la autofunción de la parte espacial, con una constante indeterminada, queda:

$$\psi_1(x) = Asen(n\pi x) \tag{13}$$

Respecto a la parte temporal, teníamos:

$$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = -K^2 \tag{14}$$

En esta ocasión no tenemos condiciones de contorno, pero podemos expresar la solución de manera general, como lo hacíamos en el caso anterior:

$$T_n = A_n sen(K_n t) + B_n cos(K_n t) \tag{15}$$

Con lo que, uniendo las dos soluciones y agrupando las constantes, obtenemos la solución final:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} sen(n\pi x)\left[A_n sen(K_n t) + B_n cos(K_n t)\right] \tag{16}$$

Por último, aplicamos las condiciones iniciales para hallar las constantes que nos quedan:

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = sen(n\pi x)\left[A_n K_n cos(K_n t) - B_n K_n sen(K_n t)\right]_{t=0} = sen(n\pi x) A_n K_n = 0 \tag{17}$$

La única solución posible es: $A_n = 0$, puesto que $K_n = \sqrt{n^2\pi^2 - 1}$, como hallamos antes. La otra condición de contorno es:

$$u(x,0) = sen(4\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} sen(n\pi x) B_n \tag{18}$$

Esta expresión únicamente es no nula cuando $n = 4$, como se puede comprobar:

$$B_4 = \frac{sen(4\pi x)}{sen(4\pi x)} = 1 \tag{19}$$

Llevamos los resultados a la solución completa y:

$$u(x,t) = sen(4\pi x) cos(\sqrt{16\pi^2 - 1}\ t) \tag{20}$$

Y para $n \neq 4$ la solución es nula, puesto que $B_n = 0$ $(\forall n \neq 4)$:

$$u(x,t) = 0 \tag{21}$$