Belén Caro Marroyo
Amalia Castañera Toboso
Miguel García Diéguez

PROBLEMA DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

TEMA 3

4. Una barra de longitud L se encuentra térmicamente aislada sobre su superficie lateral y sus extremos se mantienen a temperatura cero. Si la temperatura inicial de la barra es constante, $u(x,0) = u_0$**, se pide encontrar la distribución de temperaturas u(x,t) en cualquier instante posterior mediante:**

a) El método de separación de variables.

b) El método de las transformadas integrales.

EL MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Nuestra ecuación diferencial es la ecuación de difusión del calor:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

Las condiciones de contorno son:

$u(0,t)=0$
$u(L,t)=0$

La condición inicial es:

$u(x,0)=u_0$

Supongamos que podemos escribir la función $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Sustituyendo en la ecuación y dividiendo por u(x,t):

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{kT(t)}\frac{dT(t)}{dt}$$

Así cada miembro de la ecuación depende sólo de una variable. Por tanto, para que sean iguales entre sí han de ser iguales a una constante que denotamos por $-\lambda$. Llegamos así a 2 ecuaciones diferenciales ordinarias, una independiente del tiempo y otra del espacio.

- La ecuación dependiente del tiempo es:

$$\frac{1}{kT(t)}\frac{dT(t)}{dt} = -\lambda$$

Su solución es:

$$T(t) = T_0 e^{-\lambda kT}$$

- La ecuación dependiente del espacio es:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\lambda$$

Su solución es:

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + Bsen\sqrt{\lambda}x$$

Aplicando la primera condición de contorno:

$$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

Aplicando la segunda condición de contorno:

$$X(L) = Bsen\sqrt{\lambda}L = 0 \Leftrightarrow sen\sqrt{\lambda}L = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}L = n\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$$

Así la solución final de X(x) quedaría:

$$X_n(x) = B_n sen\left(n\frac{\pi}{L}\right)x$$

Teniendo en cuenta que $u(x,t) = X(x)T(t)$, entonces la solución de la ecuación diferencial es:

$$u_n(x,t) = T_0 B_n sen\left(n\frac{\pi}{L}\right)x * \exp(-\lambda kt) = A_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Para hallar la constante aplicamos la condición inicial:

$$u(x,0) = u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Sabemos que, de manera general, para una familia de polinomios ortogonales $P_n(x)$, se puede expresar una función Q(x) como serie de las autofunciones $P_n(x)$: $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$

Donde $C_n = \frac{\langle P_n | Q \rangle}{\|P_n\|^2} = \frac{1}{\|P_n\|^2}\int_a^b dx r(x) P_n(x) Q(x)$ y $\|P_n\|^2 = \langle P_n | P_n \rangle = \int_a^b dx r(x) P_n^2(x)$

En nuestro caso:

$$A_n = \frac{\left\langle sen\frac{n\pi x}{L} \middle| u_0 \right\rangle}{\left\| sen\frac{n\pi x}{L}\right\|^2} = \frac{2}{L}\int_0^L u_0 sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = -\frac{2u_0}{L}\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L = -\frac{2u_0}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

Estudiemos ahora el coseno según el valor de n:

Si n es par: $\cos n\pi - 1 = 0$

Si n es impar: $\cos n\pi - 1 = -2$

Así se anulan todos los términos pares del sumatorio y tenemos: $A_{2n+1} = \frac{4u_0}{n\pi}$

$$u(x,t) = \sum_{2n+1=1}^{\infty} \frac{4u_0}{n\pi} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\exp\left[-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right]$$

EL MÉTODO DE TRANSFORMADAS DE INTEGRALES

Utilizaremos la transformada de Laplace porque el tiempo va de 0 a ∞ y no es una función periódica.

Tenemos la ecuación diferencial:

$$k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

Por definición de la transformada de Laplace tenemos:

$$\tilde{u}(x,s) = L[u(x,t)] = \int_0^\infty e^{-st}u(x,t)dt$$

Aplicamos la transformada a ambos lados de la ecuación:

$$L\frac{\partial u}{\partial t} = kL\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

En el segundo término obtendríamos:

$$L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial}{\partial x^2}Lu = \frac{\partial^2 \tilde{u}(x,s)}{\partial x^2}$$

Para el primer miembro lo que nos quedaría sería:

$$L\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial t}dt$$

Para resolver esta integral lo hacemos por partes identificando los siguientes términos:

$$dv = \frac{\partial u}{\partial t}dt$$
$$v = u(x,t)$$
$$u = e^{-st}$$
$$du = -se^{-st}dt$$

Así la transformada resultaría:

$$L\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = u(x,t)e^{-st}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} su(x,t)e^{-st}dt = -u(x,0) + s\int_0^{\infty} u(x,t)e^{-st}dt = -u(x,0) + s\tilde{u}(x,s)$$

Nuestra ecuación diferencial tendría la siguiente forma en el espacio de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(x,s)}{\partial x^2} = \frac{s}{k}\tilde{u}(x,s) - \frac{1}{k}u(x,0)$$

Aplicamos la condición inicial:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s}{k}\tilde{u}(x,s) = -\frac{u_0}{k}$$

Con lo que la solución de la ecuación es:

$$\tilde{u}(x,s) = A\exp\left(\sqrt{\frac{s}{k}}x\right) + B\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{k}}x\right) + \frac{u_0}{s}$$

Aplicando una de las condiciones de contorno para calcular los valore de las constantes A y B:

$$\tilde{u}(0,s) = A + B + \frac{u_0}{s} = 0 \Rightarrow B = -\frac{u_0}{s} - A$$

$$\tilde{u}(L,s) = 0 = Ae^{\sqrt{\frac{s}{k}}L} - (A + \frac{u_0}{S})e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}L} + \frac{u_0}{S} \Rightarrow A = \frac{U_0}{s}\left(\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}L} - 1}{e^{\sqrt{\frac{s}{k}}L} - e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}L}}\right)$$

$$B = -\frac{U_0}{s}\left(\frac{e^{\sqrt{\frac{s}{k}}L} - 1}{e^{\sqrt{\frac{s}{k}}L} - e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}L}}\right)$$

La forma final de la función es:

$$\tilde{U}(x,s) = \frac{U_0}{s}\left[\left(\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}L} - 1}{e^{\sqrt{\frac{s}{k}}L} - e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}L}}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{s}{k}}x\right) - \left(\frac{e^{\sqrt{\frac{s}{k}}L} - 1}{e^{\sqrt{\frac{s}{k}}L} - e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}L}}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{k}}x\right) + 1\right]$$

Ahora lo que quedaría sería realizar la transformada inversa de Laplace de $\tilde{U}(x,s)$ y obtendríamos el siguiente resultado:

$$u(x,t) = u_0 + u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \mathrm{erfc}\left[\frac{(2n+2)L - x}{\sqrt{4kt}}\right] - \mathrm{erfc}\left[\frac{(2n+1)L - x}{\sqrt{4kt}}\right] \right.$$
$$\left. + \mathrm{erfc}\left[\frac{(2n+1)L + x}{\sqrt{4kt}}\right] - \mathrm{erfc}\left[\frac{2nL + x}{\sqrt{4kt}}\right] \right\}.$$

Si se compara con el resultado obtenido mediante el método de separación de variables se puede comprobar que es el mismo.