Métodos de la Física Matemática

Tema 3 – Ecuaciones en derivadas parciales

María F. Collado Caballero
Antonio E. Hurtado Romero
Esther Leal Cidoncha
Isabel Mª Martín Ríos

Hoja 3 – Problema 6º

La superficie de un cilindro infinito de radio unidad se mantiene a temperatura $u(r=1,\theta)=f(\theta)$. Calcular el campo de temperaturas estacionario $u(r,\theta)$ en el interior del cilindro. Hallar la solución explícita si $f(\theta)=\cos\theta$.
La ecuación a resolver es $\nabla^2 u(r,\theta)=0$.

El problema que se nos plantea es resolver: $\nabla^2 u(r,\theta)=0$, $\quad 0\le r\le 1$

Condición de contorno: $u(r=1,\theta)=f(\theta)$

El laplaciano en coordenadas polares es:

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

Por tanto nuestra ecuación queda de la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$$

Para resolver empleamos el método de separación de variables, cuyas soluciones son de la forma $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$. Si sustituimos en la ecuación anterior:

$$\Theta\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\frac{\Theta}{r}\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{R}{r^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}=0$$

Separamos variables e igualamos a una constante de separación necesaria para que se verifique la relación:

$$\frac{r^2}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r}=-\frac{1}{\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}=\lambda^2 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\lambda^2=\dfrac{r^2}{R}\dfrac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\dfrac{r}{R}\dfrac{\partial R}{\partial r} & (1)\\[2ex] -\lambda^2=\dfrac{1}{\Theta}\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} & (2)\end{cases}$$

- Resolvemos (1) sabiendo que tiene la forma de la ecuación Euler:

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - \lambda^2 R = 0$$

Tenemos 2 casos:

a) Para $\lambda = 0$:

La ecuación queda $\frac{R''}{R'} = -\frac{1}{r}$ cuya solución es:

$$R(r) = a_0 + b_0 \ln(r) \equiv R_0(r)$$

b) Para $\lambda = n$:

Las soluciones vendrán dadas de la forma $R(r) = r^\alpha$, siendo α una cantidad desconocida. Sustituyendo en la ecuación (1) obtenemos que $\alpha = \pm n$ de modo que la solución es:

$$R_n(r) = \begin{cases} r^n \\ r^{-n} \end{cases}$$

- Resolvemos (2)

$$\frac{1}{\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} + \lambda^2 = 0$$

Para que la función esté bien definida, $\Theta(\theta)$ debe ser periódica con periodo 2π. Este es un tipo de problema de la forma de Sturm-Liouville periódico. Podemos decir por tanto que las soluciones serán:

a) Para $\lambda = 0$:

$$\Theta_0(\theta) = cte$$

b) Para $\lambda = n$:

$$\Theta_n(\theta) = \begin{cases} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{cases}$$

En definitiva la solución fundamental para cada uno de los casos es:

$$\left.\begin{array}{l} u_0\left(r,\theta\right) = R_0(r)\Theta_0(\theta) = \begin{cases} 1 \\ \ln r \end{cases} \\ u_n\left(r,\theta\right) = R_n(r)\Theta_n(\theta) = \begin{cases} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{cases} \begin{cases} r^n \\ r^{-n} \end{cases} \end{array}\right\} u(r,\theta) = u_0\left(r,\theta\right) + u_n\left(r,\theta\right)$$

Por lo que la solución general nos queda de la forma:

$$u(r,\theta) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\theta$$

Para determinar los coeficientes aplicamos las condiciones de contorno:

$$u(r = 1, \theta) = f(\theta)$$

Como necesitamos dos condiciones de contorno suponemos que la temperatura en el interior del cilindro es finita, por ello $u(r = 0, \theta) = \text{finito}$, entonces los coeficientes del logaritmo neperiano y de las potencias negativas deben ser nulos.

Luego, la solución general toma la siguiente forma:

$$\boxed{u(r,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \sin n\theta}$$

Aplicamos la primera condición de contorno y nos queda:

$$u(1,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n 1^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} c_n 1^n \sin n\theta = f(\theta)$$

Podemos identificar esta expresión con un desarrollo en serie de Fourier donde los coeficientes vienen dados por:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \\
a_n 1^n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \\
c_n 1^n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta
\end{aligned}$$

Se nos pide que particularicemos para $f(\theta) = \cos\theta$.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0 \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos\theta \cos n\theta d\theta = \frac{n \sin(2n\pi)}{(-1 + n^2)\pi} = \delta_{n,1} \\
c_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin n\theta d\theta = \frac{2n \sin^2(n\pi)}{(-1 + n^2)\pi} = 0
\end{aligned}$$

Como el único coeficiente que sobrevive es $a_1 = 1$ la solución explícita del problema que se nos pide es:

$$\boxed{u(r,\theta) = r\cos\theta}$$