JUAN FERNANDO BRAVO PAREDES
PEDRO JOSÉ MUÑOZ REYES
ÁNGEL HIERRO GARDETA

Problema 6-Tema 3:

Resolver el siguiente problema acerca de la distribución estacionaria de temperaturas en un sólido semiinfinito:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0, \qquad y>0 \qquad -\infty<x<\infty$$

$$u(x,0)=\begin{cases} u_0 = cte, & |x|<a \\ 0, & |x|>a \end{cases} \quad , \qquad \lim_{y\longrightarrow\infty} \longrightarrow u(x,y)<\infty$$

Aplicamos la transformada de Fourier al la ecuación que nos da el problema, obteniendo:

$F\left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right)=0$, aplicando con los límites que establece el problema tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}e^{-ikx}dx+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}e^{-ikx}dx=0 \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}e^{-ikx}dx+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)e^{-ikx}dx=0 \qquad (1)$$

Si llamamos F(k,y) a $\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)e^{-ikx}dx = F(u(x,y))$ la ecuación (1) se queda de la forma:

nota: $F(f'(x))(k)=-ik\hat{f}(k)$; $F(f''(x))(k)=-k^2\hat{f}(k)$

$$-k^2F(k,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F(k,y)=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 F(k,y)}{\partial y^2}-k^2F(k,y)=0$$

Con lo que las soluciones a esta expresión son:

$$\lambda^2-k^2=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=|k| \\ \lambda_2=-|k|\end{cases}$$

Y que tiene como ecuación característica:

$$F(k,y) = A(k)e^{|k|y} + B(k)e^{-|k|y} \qquad (2)$$

Si aplicamos a la ecuación (2) las condiciones iniciales que nos da el problema, tenemos que:

$$\begin{cases} F(k,0) = \int_{-a}^{a} u_0 e^{-ikx} dx \\ F(k,0) = A(k) + B(k) \\ F(k,\infty) < \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(k,0) = \frac{u_0}{ik}\left(e^{ika} - e^{-ika}\right) \\ F(k,0) = A(k) + B(k) \\ A(k) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B(k) = \frac{u_0}{ik}\left(e^{ika} - e^{-ika}\right) \\ A(k) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(k) = \frac{2u_0}{k} senka \\ A(k) = 0 \end{cases}$$

Si sustituimos el resultado que nos ha salido en la ecuación característica (2) tenemos que:

$F(k,y) = \frac{2u_0}{k} e^{-|k|y} senka$; aplicando la transformada inversa de Fourier nos dará la distribución de temperaturas:

$$F^{-1}(F(k,y)) = F^{-1}\left(\frac{2u_0}{k} e^{-|k|y} senka\right) = u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2u_0 e^{-|k|y} e^{ikx} \frac{senka}{k} dk =$$

$$= u(x,y) = \frac{u_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|y} e^{ikx} \frac{senka}{k} dk = \frac{u_0}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-ky}(e^{-ikx} + e^{ikx})\frac{senka}{k} dk =$$

$$= \frac{u_0}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-ky} 2\cos kx \frac{senka}{k} dk = \frac{2u_0}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-ky}}{2k}\left[senk(a+x) + senk(a-x)\right] dk \Rightarrow$$

$$u(x,y) = \frac{u_0}{\pi}\left[arctg\frac{a+x}{y} + arctg\frac{a-x}{y}\right]$$