Pablo Pajuelo Cabezas
Carmen Mª García Tardío
Amalia Toboso Castañera
Ángel Hierro Gardeta

PROBLEMA 7 - HOJA 3

Resolver mediante separación de variables la ecuación de ondas:

$$\boldsymbol{\partial_t^2 u - \partial_x^2 u - u = 0}, \quad \boldsymbol{0 \le x \le 1}, \qquad \boldsymbol{t} > 0,$$

Con las condiciones de contorno: $\boldsymbol{u(0,t) = u(1,t) = 0}$

y la condición inicial: $\boldsymbol{u(x,0) = sen\ 4\pi x}$ **y** $\boldsymbol{\partial_t u(x,0) = 0.}$

Para resolver el problema mediante el método de separación de variables buscamos una solución de la ecuación en derivadas parciales (EDP) de la forma

$$u(x,t) = X(x)\phi(t)$$

Sustituimos y agrupamos por variables

$$\frac{1}{\phi(t)}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - 1 = \frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

La única manera de que se satisfaga la anterior expresión para cualquier valor de x y t, es que cada miembro sea igual a una constante que llamaremos $-\lambda^2$

$$\frac{1}{\phi(t)}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - 1 = \frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda^2$$

Las funciones $X(x)$ y $\phi(t)$, que forman las soluciones fundamentales, han de verificar estas dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda^2$$

$$\frac{1}{\phi(t)}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 1 - \lambda^2 = -\omega^2$$

La solución de la primera ecuación es

$$\boldsymbol{X(x) = A_n \sin \lambda x + B_n \cos \lambda x}$$

Aplicamos entonces las condiciones de contorno del problema

$$u(0,t) = 0 \;\Rightarrow\; X(0) = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{B} = \mathbf{0}$$

$$u(1,t) = 0 \;\Rightarrow\; X(1) = 0 \;\Rightarrow\; A\sin\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \sin\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\lambda_n = n\pi}$$

Análogamente buscamos la forma que ha de tomar la parte temporal $\phi(t)$

$$\boldsymbol{\phi(t) = C_n \sin\omega_n t + D_n \cos\omega_n t}$$

Entonces, podemos escribir la solución como:

$$\boldsymbol{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\widetilde{A_n}\sin\omega_n t + \widetilde{B_n}\cos\omega_n t)\sin n\pi x}$$

Donde $\boldsymbol{\widetilde{A_n}}$ y $\boldsymbol{\widetilde{B_n}}$ resultan de multiplicar las constantes de la parte espacial y la temporal

Aplicando las condiciones de contorno obtendremos el valor de estas constantes:

- $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left(\omega_n\widetilde{A_n}\cos\omega_n t\right)\sin n\pi x\Big|_{t=0} = \omega_n\widetilde{A_n}\sin n\pi x = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\widetilde{A_n} = 0}$

- $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{B_n}\sin n\pi x = \sin 4\pi x$

  Simplemente desarrollando el sumatorio podemos ver que:

$$Si\ \begin{cases} n = 4 \Rightarrow \widetilde{B_n} = 1 \\ n \neq 4 \Rightarrow \widetilde{B_n} = 0 \end{cases}$$

Por tanto, y teniendo en cuenta que $\omega_4 = \sqrt{16\pi^2 - 1}$ **,** el resultado final al que llegamos es:

$$\boldsymbol{u(x,t) = \cos\left(t\sqrt{16\pi^2 - 1}\right) sin(4\pi x)}$$