Ejercicio realizado por:

Víctor Manuel Piris Carnerero
Víctor Manuel Sánchez Carrasco
Alejandro Jesús Pérez Aparicio

Tema 3. Ejercicio 9.

Hallar mediante el método de la transformada de Laplace la solución del siguiente problema de difusión:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma^2 (u - u_1) = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad t > 0,$$

con condiciones de contorno

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0$$

y condición inicial $u(x,0) = u_0$.

Se puede observar que estamos ante una ecuación en derivadas parciales inhomogénea.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma^2 (u - u_1) = \frac{\partial u}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma^2 u + \gamma^2 u_1 = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Como el recorrido de la variable x es finito y el del tiempo es infinito, en la ecuación diferencial tomaré la transformada de Laplace respecto del tiempo y aplicaré la condición inicial.

$$\frac{d^2 \tilde{u}(x,s)}{dx^2} - \tilde{u}(x,s)(s + \gamma^2) + \overbrace{\frac{\gamma^2 u_1}{s} + u_0}^{cte \equiv término\_inhomogéneo} = 0$$

Hemos llegado a una ecuación ordinaria de 2º orden con un término inhomegéneo constante. La forma de resolverla es buscar una solución particular que cumpla dicha ecuación con sus condiciones de contorno y más tarde resolver la ecuación homogénea, siendo la solución total la suma de la solución homogénea más la particular. En primer lugar vamos a buscar una solución particular $\tilde{u}_P$ que sea constante. Para ello sustituimos $\tilde{u}(x,s)=\tilde{u}_P$ en la ecuación anterior:

$$\tilde{u}_P(s+\gamma^2)=\frac{\gamma^2 u_1}{s}+u_0 \;\Rightarrow\; \tilde{u}_P=\frac{\gamma^2 u_1}{s(s+\gamma^2)}+\frac{u_0}{s+\gamma^2}$$

Hemos buscado una solución constante para que su derivada respecto de x valga cero y así se cumplan las condiciones de contorno.

A continuación procedemos a resolver la ecuación homogénea

$$\frac{d^2\tilde{u}_H(x,s,)}{dx^2}-\tilde{u}_H(x,s)(s+\gamma^2)=0$$

$$\tilde{u}_H(x,s)=Ae^{\sqrt{s+\gamma^2}x}+Be^{-\sqrt{s+\gamma^2}x}$$

$$\tilde{u}(x,s)=\tilde{u}_H(x,s)+\tilde{u}_P=Ae^{\sqrt{s+\gamma^2}x}+Be^{-\sqrt{s+\gamma^2}x}+\frac{\gamma^2 u_1}{s(s+\gamma^2)}+\frac{u_0}{s+\gamma^2}$$

$$\frac{d\tilde{u}(x,s)}{dx}=\sqrt{s+\gamma^2}Ae^{\sqrt{s+\gamma^2}x}-\sqrt{s+\gamma^2}Be^{-\sqrt{s+\gamma^2}x}$$

La primera condición de contorno es $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0$ de la que se duduce que

$$\left.\frac{d\tilde{u}(x,s)}{dx}\right|_{x=0}=0 \;\Rightarrow\; \sqrt{s+\gamma^2}A=\sqrt{s+\gamma^2}B \;\Rightarrow\; A=B$$

Sustituyendo en la solución queda

$$\tilde{u}(x,s)=A\left(e^{\sqrt{s+\gamma^2}x}+e^{-\sqrt{s+\gamma^2}x}\right)+\frac{\gamma^2 u_1}{s(s+\gamma^2)}+\frac{u_0}{(s+\gamma^2)}$$

$$\frac{d\tilde{u}(x,s)}{dx}=A\left(\sqrt{s+\gamma^2}e^{\sqrt{s+\gamma^2}x}-\sqrt{s+\gamma^2}e^{-\sqrt{s+\gamma^2}x}\right)$$

La segunda condición de contorno es $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=1}=0$ de la que se deduce

$$\left.\frac{d\tilde{u}(x,s)}{dx}\right|_{x=1}=0 \;\Rightarrow\; A\sqrt{s+\gamma^2}e^{\sqrt{s+\gamma^2}x}=A\sqrt{s+\gamma^2}e^{-\sqrt{s+\gamma^2}x} \;\Rightarrow\; A=0$$

Por lo que la solución en el espacio de Laplace queda de la siguiente forma

$$\tilde{u}(x,s) = \frac{\gamma^2 u_1}{s(s+\gamma^2)} + \frac{u_0}{s+\gamma^2} = \frac{\gamma^2 u_1 + s u_0}{s(s+\gamma^2)}$$

Ahora tenemos que pasar esta solución al espacio real por lo que tomaremos la transformada inversa de Lapace

$$u(x,t) = \mathscr{L}^{-1}\{\tilde{u}(x,s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\gamma^2 u_1 + s u_0}{s(s+\gamma^2)}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} ds \cdot e^{st}\, \frac{\gamma^2 u_1 + s u_0}{s(s+\gamma^2)}$$

Esta integral la resolveremos mediante el teorema del residuo, el cual dice que el valor de la anterior integral es $2\pi i$ veces el sumatorio de los residuos de la función que se integra. El factor constante de la integral se cancela con el valor $2\pi i$ del teorema del residuo por lo que tenemos:

los polos de $\frac{\gamma^2 u_1 + s u_0}{s(s+\gamma^2)} \cdot e^{st}$ son : $\begin{cases} s = 0 \\ s = -\gamma^2 \end{cases}$

$$u(x,t) = \lim_{s\to 0} \frac{(\gamma^2 u_1 + s u_0) e^{st} s}{s(s+\gamma^2)} + \lim_{s\to -\gamma^2} \frac{(\gamma^2 u_1 + s u_0) e^{st}(s+\gamma^2)}{s(s+\gamma^2)}$$

$$u(x,t) = \frac{\gamma^2 u_1}{\gamma^2} + \frac{(\gamma^2 u_1 - \gamma^2 u_0) e^{-\gamma^2 t}}{-\gamma^2} = u_1 - (u_1 - u_0) e^{-\gamma^2 t} = u_1 - u_1 e^{-\gamma^2 t} + u_0 e^{-\gamma^2 t}$$

$$\boxed{u(x,t) = u_0 e^{-\gamma^2 t} + u_1 (1 - e^{-\gamma^2 t})}$$