Hoja 4 **PROBLEMAS DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA** Curso 08/09

1. Analiza la estabilidad del punto de reposo de los sistemas:

   a) $\dot{x} = x + 3y$, $\dot{y} = 5x - y$;

   b) $\dot{x} = 3x + y$, $\dot{y} = (a^2 - 1)x + y$

2. Clasifica, según el valor de α, el punto de reposo del sistema $\dot{x} = -3x + \alpha y$, $\dot{y} = 2x + y$.

3. Analiza la estabilidad del punto de reposo del sistema: $\dot{x} = -x + z$, $\dot{y} = -2y - z$, $\dot{z} = y - z$.

4. Dibuja el diagrama de fases alrededor del origen de un sistema lineal de dos ecuaciones de primer orden en el que una de sus raíces es nula. Analiza la estabilidad del punto fijo $(0, 0)$.

5. Demuestra que el diagrama de fases de todos los sistemas lineales de dos ecuaciones de primer orden con raíz nula doble es equivalente al del sistema

$$\dot{x} = x - sy, \quad \dot{y} = \frac{1}{s}x - y,$$

   con $s \neq 0$ arbitrario. Comprueba que la solución de este sistema es $x(t) = c_1 + (c_1 - c_2 s)t$, $y(t) = c_2 + \frac{1}{s}(c_1 - c_2 s)t$. Dibuja el diagrama de fases y analiza la estabilidad del punto fijo $(0, 0)$.

6. ★ En este ejercicio queremos analizar la evolución de los sentimientos amorosos de Romeo y Julieta. Sea $R(t)$ la medida del amor de Romeo por Julieta en el instante t y $J(t)$ el de Julieta por Romeo. Si esta medida es negativa, el sentimiento no es de amor sino de rechazo. Un modelo simple de la evolución de sus amores se basa en la consideración de que su amor crece o disminuye dependiendo sólo de sus sentimientos mutuos. Supongamos que esta dependencia es lineal. Entonces

$$\frac{dR}{dt} = aR + bJ, \quad \frac{dy}{dt} = cR + dJ.$$

   a) Sugiere nombres que describan el caracter de un enamorado, digamos de Romeo, para las distintas combinaciones del signo de a y b.

   b) Supón que el amor de Romeo aumenta (disminuye) si Julieta le ama (no le ama) y el de Julieta aumenta (disminuye) si Romeo no le ama (sí le ama). En este caso, las ecuaciones tomarían la forma

$$\frac{dR}{dt} = aJ, \quad \frac{dJ}{dt} = -bR.$$

   con $a > 0$ y $b > 0$. Traza el diagrama de fases de la evolución de los amores de Romeo y Julieta para este caso.

   c) Supón que el amor de Romeo tiende a disminuir si él ya ama a Julieta y a aumentar si Julieta le ama. Supón que Julieta se comporta exactamente de la misma forma. En este caso, la evolución de sus sentimientos vendría dada por

$$\frac{dR}{dt} = aR + bJ, \quad \frac{dJ}{dt} = bR + aJ.$$

   con $a < 0$ y $b > 0$. Demuestra que:

   1) Si $a^2 > b^2$, entonces su relación amorosa languidece hasta la indiferencia absoluta.

   2) Si $a^2 < b^2$, entonces su relación amorosa puede transformase bien en pasión total o en guerra encarnizada. Determina bajo qué condiciones iniciales se produce una cosa u otra.

   Si te ha gustado este problema, puedes ver más sobre modelos matemáticos del amor y la felicidad en la página web
   `http://sprott.physics.wisc.edu/lectures/love&hap/index.htm`.

7. Las ecuaciones de Lotka-Volterra

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy, \quad \frac{dy}{dt} = -cy + \beta xy.$$

   con $a > 0$, $c > 0$, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ pretenden describir la evolución de la población x de una especie (*presas*) que es cazada por otra especie (*predadores*) cuya población es y.

a) Discute la adecuación del sistema anterior a la descripción del sistema *predador-presa* e interpreta el significado de los coeficientes a, c, α y β.

b) Halla los puntos críticos del sistema y, mediante el análisis del sistema linealizado, discute su tipo y estabilidad. Haz un esquema de las trayectorias del sistema linealizado en las vecindades de los puntos críticos.

c) Demuestra que la ecuación general de las trayectorias del sistema no lineal es $c \ln x - \beta x + a \ln y - \alpha y =$ const. Dibuja estas trayectorias en el espacio de fases para distintas condiciones iniciales.

8. ★ Las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon_1 x - \sigma_1 x^2 - \alpha_1 xy, \quad \frac{dy}{dt} = \epsilon_2 y - \sigma_2 y^2 - \alpha_2 xy$$

con $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, son ecuaciones de tipo Lotka-Volterra que pretenden describir la competición de dos especies (digamos conejos y ovejas), con población x e y, que, en un ecosistema dado, comparten un mismo alimento (hierba) presente en cantidades limitadas. En lo que sigue supón que $\epsilon_1 = 3$, $\epsilon_2 = 2$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$.

a) Discute la adecuación del sistema anterior a la descripción del sistema de dos especies competidoras e interpreta el significado de los coeficientes ϵ_1, ϵ_2, σ_1, σ_2, α_1, α_2.

b) Halla los puntos críticos del sistema y, mediante el análisis del sistema linealizado, discute su tipo y estabilidad. Haz un esquema de las trayectorias del sistema linealizado en las vecindades de los puntos críticos.

c) Haz un esquema de las trayectorias en el espacio de fases.

9. Demuestra que la solución nula de la ecuación de van der Pol $\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, con $|\epsilon| \ll 1$, es asintóticamente estable cuando $\epsilon < 0$ e inestable cuando $\epsilon > 0$.

10. $\boxed{\texttt{www}}$ Halla la estabilidad de los puntos críticos del sistema

$$\dot{x} = y(x+1), \quad \dot{y} = x(1+y^3)$$

y determina sus trayectorias de modo cualitativo.

11. ★ Sea el sistema

$$\dot{x} = y\,, \qquad \dot{y} = -4x + x^2\,.$$

a) Halla los puntos críticos. ¿Son puntos críticos simples? Determina su tipo y estabilidad.

b) Halla la ecuación de las trayectorias que pasan por los puntos críticos.

c) Halla de forma aproximada mediante el método de balance armónico las trayectorias del sistema que pasan por las vecindades del origen. Utiliza el resultado obtenido para determinar la estabilidad del origen $(0, 0)$.

d) Dibuja un esquema de las trayectorias en el plano $x - y$.

12. Demuestra que el origen es un punto espiral del sistema

$$\dot{x} = -y - x\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \dot{y} = x - y\sqrt{x^2 + y^2}$$

pero es un centro del sistema linealizado.

13. Encuentra funciones de Liapunov para los sistemas

$$\begin{array}{llll} (a) & \dot{x} = & -x - 2y^2\,, & \dot{y} = xy - y^3 \\ (b) & \dot{x} = & y - x(x^2+y^2)\,, & \dot{y} = -x - y(x^2+y^2) \\ (c) & \dot{x} = & -x + y - xy^2\,, & \dot{y} = -2x - y - x^2 y \end{array}$$

14. $\boxed{\texttt{www}}$ Comprueba que $8x^2 + 11xy + 5y^2$ es función de Liapunov del sistema $\dot{x} = x + 4y$, $\dot{y} = -2x - 5y$.

15. Demuestra que el sistema dado en coordenadas polares

$$\frac{dr}{dt} = r\, f(r,\theta), \quad \frac{d\theta}{dt} = g(r,\theta).$$

se reduce, en coordenadas cartesianas, al sistema

$$\frac{dx}{dt} = x\, f[r(x,y),\theta(x,y)] - y\, g[r(x,y),\theta(x,y)], \quad \frac{dy}{dt} = x\, g[r(x,y),\theta(x,y)] + y\, f[r(x,y),\theta(x,y)]. \tag{1}$$

En lo que sigue supón que $g(\theta) = 1$ y que $f(r,\theta) = f(r)$ es una función continua.

a) Si $f(r)$ tiene n ceros, demuestra que el sistema (1) tiene un punto fijo y n soluciones periódicas (ciclos límite) de la forma $(x = r_m \cos t, y = r_m \operatorname{sen} t)$, siendo r_m uno de los ceros de $f(r)$. Analiza la estabilidad de cada ciclo límite en función del signo de $f(r)$ entre los ceros.

b) Supón que $f(r)$ es un polinomio (digamos de grado dos) que pasa por $r = 1$ y $r = 2$. Obtén el sistema no lineal dado por (1) cuyos ciclos límite son $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ y $(2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$.

c) Supongamos que $f(r) = 0$ para todo r. ¿Significa esto que hay un ciclo límite para todo r?

d) ¿Bajo qué condiciones es lineal el sistema (1)? Utiliza el sistema equivalente en polares para demostrar que bajo esas condiciones el sistema (1) no puede tener ciclos límite?

e) Usando tanto la representación polar como la cartesiana, determina cuándo es estable el punto crítico $(x = 0, y = 0)$.

16. Encuentra soluciones aproximadas mediante el método de balance armónico de las ecuaciones siguientes:

a) $\ddot{x} + x - \frac{1}{6}x^3 = 0$. Compara con la relación frecuencia-amplitud exacta del péndulo: $\omega^2 = 1 - \frac{A^2}{8} + \frac{5A^4}{1536} + O(A^6)$.

b) $\ddot{x} + \operatorname{sen}(x) = 0$. Compara con la relación frecuencia-amplitud exacta del péndulo.

c) $\boxed{\texttt{www}}$ $\ddot{x} + \operatorname{sgn}(x) = 0$.

d) $\boxed{\texttt{www}}$ $\ddot{x} + e^{x} - e^{-x} = 0$.

e) $\boxed{\texttt{www}}$ $\ddot{x} + x - \alpha x^2 = 0, \quad 0 < \alpha$.

f) $\ddot{x} - x + \alpha x^3 = 0, \quad 0 < \alpha$.

g) ★ $\ddot{x} + \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x - \alpha x^2 = 0, \quad 0 < \alpha$.

h) ★ $\ddot{x} + \epsilon(1 - x^2)\dot{x} - x + \alpha x^3 = 0, \quad 0 < \alpha$.

i) $\ddot{x} + x^3 + \dot{x}^2 x = 0$ y compara con la solución exacta $\dot{x}(x)$ en el plano de fases $\dot{x} - x$ [véase el ejemplo 5.12 del libro *Métodos matemáticos avanzados para científicos e ingenieros*, Santos Bravo Yuste (Servicio de Publicaciones de la UEx, Cáceres, 2006)].

17. Emplea el método de Krylov-Bogoliubov para hallar soluciones aproximadas de las siguientes ecuaciones:

a) $\boxed{\texttt{www}}$ $\ddot{x} + x + \epsilon x^3 = 0$.

b) $\ddot{x} + x + \epsilon \dot{x}^2 = 0$.

c) $\ddot{x} + x + \epsilon |\dot{x}|\dot{x} = 0$.

d) ★ $\ddot{x} + x + \epsilon \operatorname{sgn}(\dot{x}) = 0$, (amortiguamiento de Coulomb).

e) $\boxed{\texttt{www}}$ $\ddot{x} + x + \epsilon(\dot{x} + \alpha x^3) = 0$.

f) ★ $\ddot{x} + \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x - \alpha x^2 = 0, \quad 0 < \alpha$.

g) ★$\ddot{x} + \epsilon(1 - x^2)\dot{x} - x + \alpha x^3 = 0, \quad 0 < \alpha$.