Ejercicio11

Tema4

Ángel Hierro Gardeta
Carmen María García Tardío
Pablo Pajuelo Cabezas
Amalia Toboso Castañera

Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x + x^2 \end{cases}$$

a) Halla los puntos crítico. ¿Son puntos crítico simples? Determina su tipo y estabilidad.

b) Halla la ecuación de las trayectorias que pasan por los puntos crítico.

c) Halla de forma aproximada mediante el método de balance armónico las trayectorias del sistema que pasan por las vecindades del origen. Utiliza el resultado obtenido para determinar la estabilidad del origen (0, 0).

d) Dibuja un esquema de las trayectorias en el plano x − y.

Apartado a

Los puntos críticos del sistema satisfacen la ecuación:

$$\begin{cases} 0 = y \\ 0 = -4x + x^2 \end{cases}$$

La solución de estas ecuaciones nos dan los puntos P1=(0,0) y P2=(4,0)

Analicemos cada uno de ellos.

- **P1=(00)**

En primer lugar veremos si es punto crítico simple.
Comprobemos que el determinante de los coeficientes del sistema linealizado sea distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

Y comprobemos que las partes no lineales del sistema satisfagan los siguientes límites:

$$\lim_{x,y \to 0,0} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Donde f(x,y) es dicha parte no lineal.
En un caso, f(x,y)=0, luego el límite se cumple.
Por otro lado tenemos f(x,y)=x2. Esta función tiende a cero más rápido que el denominador, luego se cumple el límite.

Con esto queda demostrado que el punto (0,0) es simple.

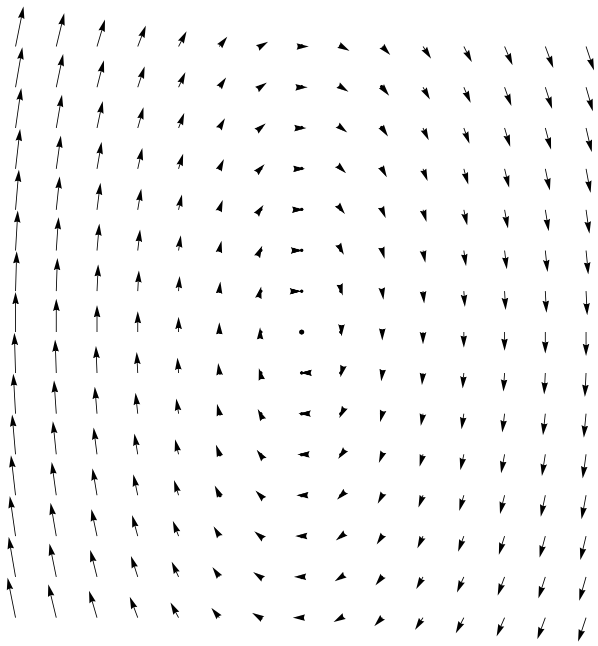
Analicemos ahora su tipo y estabilidad. Para ello resolvamos la ecuación característica del sistema linealizado:

$$\begin{vmatrix} 0-m & 1 \\ -4 & 0-m \end{vmatrix} = m^2 + 4 = 0$$

Obtenemos como resultado:

$$\begin{cases} m_1 = 2i \\ m_2 = -2i \end{cases}$$

Como las raíces son imaginarias puras tenemos que el punto en cuestión es un centro, como $\dot{x} > 0$ cuando $x = 0 \; e \; y > 0$ Las trayectorias van en sentido de las agujas del reloj. Al tratarse de un caso límite, recurriremos a su representación mediante un programa gráfico. Este nos muestra que en el sistema no lineal, tenemos un centro.



- **P2=(4,0)**

Para estudiar este punto hagamos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\xi = x - 4 \qquad \eta = y$$

Con esto logramos que el punto (4,0) sea el origen del nuevo sistema de referencia.
El sistema que nos queda es el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = 4\xi + \xi^2 \end{cases}$$

Ahora ya podemos aplicarle las condiciones requeridas:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4 \qquad\qquad \lim_{\xi,\eta \to 0,0} \frac{f(\xi,\eta)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = 0$$

El límite se cumple de la misma forma que se explicó para el punto anterior. Es decir, el punto (4,0) es un punto crítico simple. Estudiando la ecuación característica asociada podremos saber su tipo y estabilidad.

$$\begin{vmatrix} 0 - m & 1 \\ 4 & 0 - m \end{vmatrix} = m^2 - 4 = 0 \qquad\qquad \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = -2 \end{cases}$$

Como podemos ver tenemos un punto de silla inestable, luego en el sistema no lineal, también tendremos un punto de silla inestable.

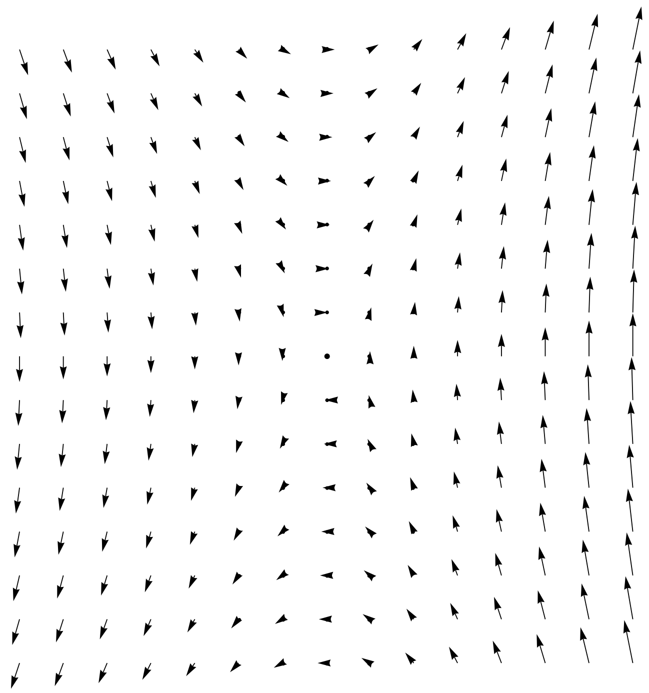
Calculemos los vectores directores:

- Para m=2

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2A = B \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Para m=-2

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2A = -B \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Apartado b

Para obtener la ecuación de las trayectorias basta con obtener el cociente $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ e integrar.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x + x^2}{y}$$

Por el método de separación de variables, llegamos a:

$$y = \pm\sqrt{c - 2x^2 + \frac{x^3}{3}}$$

Particularizamos para el punto (4,0), pues la trayectoria no pasa por (0,0) ya que es un centro. De esta forma obtenemos el valor de c. La solución completa queda de la forma:

$$y = \pm\sqrt{\frac{32}{3} - 2x^2 + \frac{x^3}{3}}$$

Apartado c

Vamos a aplicar el método de balance armónico. Para ello expresamos el sistema en forma de ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + 4x - x^2 = 0$$

Optamos por una solución de la forma $x(t) = C + A\cos\omega t$
En primer lugar veamos si podemos considerar C=0. Para ello debe suceder que el término $4x - x^2$ cumpla la siguiente relación:

$$4(-x) - (-x)^2 = -(4x - x^2)$$

Vemos que esto no es así. Luego C es distinto de cero.
Vamos a introducir la solución propuesta en la ecuación diferencial, teniendo en cuenta que:

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos\omega t$$

Obteniendo la siguiente expresión:

$$(-A\omega^2 + 4A - 2CA)\cos\omega t + 4C - C^2 - A^2\cos^2\omega t = 0$$

Sabemos que:

$$\cos^{2\mathrm{n}} x = \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} + a.o.s \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} + a.o.s$$

Si sustituimos en la ecuación y despreciamos los armónicos de orden superior, obtenemos que los coeficientes que acompañan a las potencias de cos ωt han de ser cero.

$$\begin{cases} -A\omega^2 + 4A - 2CA = 0 \\ 4C - C^2 - \dfrac{A^2}{2} = 0 \end{cases}$$

Obtenemos los siguientes resultados:

$$C = 2 \pm \sqrt{4 - \frac{A^2}{2}} \qquad \omega^2 = 4 - 2C$$

Como vemos tenemos que elegir el signo negativo en la expresión de C para que la frecuencia tenga un valor real.

$$\omega^2 = 2\sqrt{4 - \frac{A^2}{2}} \Rightarrow \omega = \sqrt[4]{16 - 2A^2}$$

La solución final queda de la forma:

$$x(t) = 2 - \sqrt{4 - \frac{A^2}{2}} + A\cos\sqrt[4]{16 - 2A^2}\,t$$

Apartado d

Haciendo uso de los resultados de los apartados anteriores