Ejercicio realizado por:

Víctor Manuel Piris Carnerero
Víctor Manuel Sánchez Carrasco
Alejandro Jesús Pérez Aparicio

Tema 4. Ejercicio 13

Comprueba que $8x^2 + 11xy + 5y^2$ **es una función de Liapunov del sistema**

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x + 4y \\ \dot{y} &= -2x - 5y \end{aligned}\right\}$$

Para que la función del enunciado pueda considerarse de Liapunov debe cumplir que sea definida positiva. Para comprobar esta propiedad buscamos un teorema que nos lo asegure. Éste dice que todas las funciones de la forma $E(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ en las que a>0 y $b^2 - 4ac$ <0 cumplen que son definidas positivas.Vamos a comprobar si nuestra función cumple estos requisitos:

1) a=8>0 lo cumple

2) $b^2 - 4ac$ = 11^2-4·8·5=121-160= -39<0 lo cumple

Estamos en disposición de decir que la función del enunciado es definida positiva.

Vamos a ver que tipo de función de Liapunov tenemos. Si $\dot{E}(x,y) = \frac{d}{dt}E(x,y)$ es semidefinida negativa tendremos que E(x,y) es una función débil de Liapunov del sistema del enunciado. Si $\dot{E}(x,y)$ es definida negativa entonces tendremos que E(x,y) es una función fuerte de Liapunov del sistema del enunciado.

$$\dot{E}(x,y) = \frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G = (16x + 11y)\cdot(x + 4y) + (11x + 10y)\cdot(-2x - 5y) = -6(x^2 + y^2)$$

Vemos que $\dot{E}(x,y)$ es definida negativa por lo que concluimos que la función E(x,y) del enunciado es una función fuerte de Liapunov. Podemos añadir que debido a esto se cumple que el punto (0,0) es asintóticamente estable.