Ejercicio realizado por:

Víctor Manuel Piris Carnerero
Víctor Manuel Sánchez Carrasco
Alejandro Jesús Pérez Aparicio

Tema 4. Ejercicio 15. Apartado c

Encuentra la solución aproximada mediante el método de balance armónico de la siguiente ecuación:

$$\ddot{x} + \operatorname{sgn}(x) = 0$$

El método de balance armónico propone una solución del tipo $x(t) = c + A\cos(\omega t)$

Si nos fijamos la ecuación diferencial es simétrica respecto al cambio x por –x:
Para x negativas la ecuación es $\ddot{x} - 1 = 0 \rightarrow -\ddot{x} - 1 = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 1 = 0$ que es la ecuación para x positivas.
Para x positivas la ecuación es $\ddot{x} + 1 = 0 \rightarrow -\ddot{x} + 1 = 0 \Rightarrow \ddot{x} - 1 = 0$ que corresponde a la ecuación para x negativas.

Debido a esta propiedad podemos cancelar el valor de la constante c y optar por el siguiente tipo de solución

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

Si derivamos respecto al tiempo llegamos a

$$x(t) = A\cos(\omega t) \Rightarrow \dot{x}(t) = -A\omega sen(\omega t) \Rightarrow \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t)$$

Las ecuaciones que estudia el método de balance armónico son de la forma $\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$

Como nuestra ecuación es $\ddot{x} + \operatorname{sgn}(x) = 0$ concluimos que $f(x, \dot{x}) = \operatorname{sgn}(x)$ y como antes hemos dicho que $x(t) = A\cos(\omega t)$ entonces $f(x, \dot{x}) = \operatorname{sgn}\left[A\cos(\omega t)\right]$

Si hacemos un desarrollo en serie de Fourier tomando solo los armónicos de menor orden tenemos la siguiente aproximación

$$f(x, \dot{x}) = \operatorname{sgn}\left[A\cos(\omega t)\right] = k + g\cos(\omega t) + h sen(\omega t)$$

A continuación vamos a calcular uno a uno el valor de los coeficientes del desarrollo de Fourier considerando $\psi = \omega t$.

$$k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(A\cos\psi)\, d\psi$$

Para evaluar la integral la dividimos en cuatro intervalos

Intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: la función $A\cos\psi$ es positiva por lo que la función sgn($A\cos\psi$) vale 1.

Intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$: la función $A\cos\psi$ es negativa por lo que la función sgn($A\cos\psi$) vale –1.

Intervalo $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$: la función $A\cos\psi$ es negativa por lo que la función sgn($A\cos\psi$) vale –1.

Intervalo$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$: la función $A\cos\psi$ es positiva por lo que la función sgn($A\cos\psi$) vale 1.

Como el área de las cuatro regiones es igual en valor absoluto y se tiene que en dos de los intervalos (1º y 4º) es positiva y en dos negativa (2º y 3º) concluimos que la suma total de las cuatro integrales es 0 y por tanto k=0.

$$h = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(A\cos\psi)\, sen\,\psi\, d\psi$$

Para evaluar la integral la dividimos en cuatro intervalos

Intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: la función $A\cos\psi$ es positiva por lo que la función sgn($A\cos\psi$) vale 1, entonces la función $\operatorname{sgn}(A\cos\psi) sen\,\psi = sen\,\psi$. Como la función $sen\,\psi$ es positiva en este intervalo entonces este área es positiva.

Intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$: la función $A\cos\psi$ es negativa por lo que la función sgn($A\cos\psi$) vale -1, entonces la función $\operatorname{sgn}(A\cos\psi) sen\,\psi = -sen\,\psi$. Como la función $sen\,\psi$ es positiva en este intervalo entonces este área es negativa.

Intervalo $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$: la función $A\cos\psi$ es negativa por lo que la función sgn($A\cos\psi$) vale -1, entonces la función $\operatorname{sgn}(A\cos\psi) sen\,\psi = -sen\,\psi$. Como la función $sen\,\psi$ es negativa en este intervalo entonces este área es positiva.

Intervalo$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$: la función $A\cos\psi$ es positiva por lo que la función sgn($A\cos\psi$) vale 1, entonces la función $\operatorname{sgn}(A\cos\psi) sen\,\psi = sen\,\psi$. Como la función $sen\,\psi$ es negativa en este intervalo entonces este área es negativa.

Como el área de las cuatro regiones es igual en valor absoluto y se tiene que en dos de los intervalos(1º y 3º) es positiva y en dos (2º y 4º) negativa concluimos que la suma total de las cuatro integrales es 0 y por tanto h=0.

$$g = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(A\cos\psi)\cos\psi d\psi$$

Para evaluar la integral la dividimos en cuatro intervalos

Intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: la función $A\cos\psi$ es positiva por lo que la función sgn($A\cos\psi$) vale 1, entonces la función $\operatorname{sgn}(A\cos\psi)\cos\psi = \cos\psi$. Como la función $\cos\psi$ es positiva en este intervalo entonces este área es positiva.

Intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$: la función $A\cos\psi$ es negativa por lo que la función sgn($A\cos\psi$) vale -1, entonces la función $\operatorname{sgn}(A\cos\psi)\cos\psi = -\cos\psi$. Como la función $\cos\psi$ es negativa en este intervalo entonces este área es positiva.

Intervalo $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$: la función $A\cos\psi$ es negativa por lo que la función sgn($A\cos\psi$) vale -1, entonces la función $\operatorname{sgn}(A\cos\psi)\cos\psi = -\cos\psi$. Como la función $\cos\psi$ es negativa en este intervalo entonces este área es positiva.

Intervalo$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$: la función $A\cos\psi$ es positiva por lo que la función sgn($A\cos\psi$) vale 1, entonces la función $\operatorname{sgn}(A\cos\psi)\cos\psi = \cos\psi$. Como la función $\cos\psi$ es positiva en este intervalo entonces este área es positiva.

Como el área de las cuatro regiones es igual en valor absoluto y se tiene que en los cuatro intervalos es positiva concluimos que la suma total de las cuatro integrales es igual a cuatro veces el valor de la integral en cualquiera de las cuatro regiones.

$$g = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(A\cos\psi)\cos\psi d\psi = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sgn}(A\cos\psi)\cos\psi d\psi = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\psi d\psi = \frac{4}{\pi}\left(sen\frac{\pi}{2} - sen0\right) = \frac{4}{\pi}$$

Si ahora volvemos a la ecuación del desarrollo de Fourier y sustituimos los valores de las integrales tenemos:

$$f(x,\dot{x}) = \mathrm{sgn}\left[A\cos(\omega t)\right] = k + g\cos(\omega t) + hsen(\omega t) \Rightarrow \mathrm{sgn}\left[A\cos(\omega t)\right] = \frac{4}{\pi}\cos(\omega t)$$

Si ahora sustituimos esto en la ecuación diferencial de partida sabiendo que

$$x(t) = A\cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t)$$

entonces

$$\ddot{x} + \mathrm{sgn}(x) = 0 \Rightarrow -A\omega^2\cos(\omega t) + \frac{4}{\pi}\cos(\omega t) = 0 \Rightarrow A\omega^2\cos(\omega t) = \frac{4}{\pi}\cos(\omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{4}{\pi A} \Rightarrow \omega = \frac{2}{\sqrt{\pi A}}$$

Por lo que la solución queda

$$x(t) = A\cos(\omega t) \Rightarrow x(t) = A\cos(\frac{2}{\sqrt{\pi A}}t)$$

A partir de ahora dedicaremos el resto del ejercicio a calcular de forma exacta la frecuencia angular para compararla con la obtenida por el método de balance armónico.

Para x positivas la ecuación del enunciado $\ddot{x} + \mathrm{sgn}(x) = 0$ toma la forma $\ddot{x} + 1 = 0$

Resolviendo esta ecuación diferencial obtenemos $x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \alpha t + \beta \Rightarrow \dot{x}(t) = -t + \alpha$

Por otro lado en el método de balance armónico habíamos tomado

$$x(t) = A\cos(\omega t) \Rightarrow \dot{x}(t) = -A\omega sen(\omega t)$$

Si a estas dos ecuaciones y a las dos anteriores les aplicamos las condiciones iniciales tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = A = \beta \\ \dot{x}(0) = 0 = \alpha \end{array}\right\}$$ sustituyendo esto en nuestra solución llegamos a

$$x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \alpha t + \beta \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + A$$

Si consideramos un péndulo que en el instante inicial t =0 forma un ángulo cualquiera con la vertical, cuando haya transcurrido un tiempo t_P dicho péndulo se encontrará totalmente vertical. Cuando transcurra otro t_P formará el mismo ángulo que al principio con signo negativo. Cuando pase otro t_P volverá a estar totalmente vertical. Y al transcurrir otro t_P volverá a la posición inicial en la cual formaba un cierto ángulo positivo con la vertical, con lo que en total habrá transcurrido un periodo (T). Por ello se cumple:

$$x(t_P) = 0 = -\frac{1}{2}t_P{}^2 + A \Rightarrow t_P = \sqrt{2A} \Rightarrow T = 4t_P = 4\sqrt{2A}$$

Una vez conocido el período podemos calcular la frecuencia angular

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2\sqrt{2A}} \approx \frac{1.111}{\sqrt{A}}$$ Recordemos que por el método de balance armónico se obtenía

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{\pi A}} \approx \frac{1.128}{\sqrt{A}}$$ Se puede apreciar que el método de balance armónico es bastante efectivo.