JUAN FERNANDO BRAVO PAREDES

PEDRO JOSÉ MUÑOZ REYES

ÁNGEL HIERRO GARDETA

HOJA 4 - Problema 15 d)

Encontrar soluciones aproximadas mediante el método de balance armónico la siguiente ecuación:

$$\ddot{x} + e^{x} - e^{-x} = 0 \qquad (1)$$

Por hipótesis, la solución será de la forma:

$$x = C + A\cos(\omega t)$$

Por otro lado sabemos que el seno hiperbólico es:

$$(e^{x} - e^{-x})/2 = senh\,(x) \qquad (3)$$

Como senh(x) es una función impar de x, tendremos que la constante de asimetría C es nula. Luego la solución que suponemos por hipótesis será de la forma:

$$x = A\cos(\omega t) \qquad (2)$$

Por tanto, teniendo en cuenta (3) y sustituyendo la solución (2) en nuestra ecuación (1), tendremos:

$$-A\omega^2\cos(\omega t) + 2\,senh(A\cos(\omega t)) = 0 \qquad (4)$$

A continuación realizaremos el desarrollo en serie de Fourier de $senh(A\cos(wt))$:

$$senh\,(A\cos(\omega t)) = a_0(A,\omega) + a_1(A,\omega)\cos\Psi + b_1(A,\omega)\,sen\Psi + a.o.s.$$

donde: $\Psi = \omega$t , y $a_0(A), a_1(A), b_1(A)$ son los coeficientes generalizados de Fourier.

Teniendo en cuenta que en nuestro caso $a_0(A)$ y b_1(A) son nulos, y desarrollando $a_1(A)$ se tiene:

$$a_0(A) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\,senh\,(A\cos\,\Psi)\mathrm{d}\Psi = 0$$

$$b_1(A) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2\ senh\ (Acos\ \ \Psi)\text{sen}\Psi \text{d}\Psi = 0$$

$$a_1(A) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2\ senh\ (Acos\ \ \Psi)\text{cos}\Psi\ \text{d}\Psi$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} senh\ (Acos\ \ \Psi)\text{cos}\Psi\ \text{d}\Psi = \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/2} senh\ (Acos\ \ \Psi)\text{cos}\Psi\ \text{d}\Psi$$

Y como la función de Bessell modificada puede expresarse como:

$$I_1(A) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} senh\ (Acos\ \ \Psi)\text{cos}\Psi\ \text{d}\Psi \qquad (5)$$

tendremos:

$$a_1(A, \omega) = 4I_1(A) \qquad (6)$$

Por tanto, sustituyendo las expresiones (5) y (6) en la ecuación (4) se tiene:

$$\text{-}A\ \omega^2 cos(\omega t) + 4\ I_1\ (A)\ \text{cos}(\omega t) = 0$$

Así pues:

$$\text{-}A\ \omega^2 + 4\ I_1\ (A) = 0\ \ => \ \omega = \sqrt{\frac{4\ I_1(A)}{A}}$$